BACALAUREAT 2026

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a\\ a & 3 & a\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații liniare $\begin{cases}x+ay+az=1\\ ax+3y+az=0\\ 2y+z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(1))=2$.

b) Arătați că, pentru orice număr real a, sistemul de ecuații are soluție unică.

c) Determinați numărul natural nenul a pentru care sistemul de ecuații are soluția (x_0,y_0,z_0), cu $z_0=nx_0$, unde n este număr natural.

BACALAUREAT 2026 – rezerva

Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}2a-1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -a\\ 0 & 2 & 2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(3))=0$.

b) Arătați că $A(a)\cdot A(a)=(2a-1)A(a)$, pentru orice număr real a.

c) Se consideră matricea $B(n)=A(n)+nI_3$, unde n este număr natural. Determinați numărul natural n pentru care $A(n)\cdot B(n)=2n^2A(n)$.

BACALAUREAT 2026 – 11 august 2026

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & -2a\\ 2 & -1 & -a\\ 1 & -a & 0\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații liniare $\begin{cases}x+ay-2az=-1\\ 2x-y-az=a\\ x-ay=a\end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(2))=4$.

b) Pentru $a=1$, arătați că sistemul de ecuații are o infinitate de soluții.

c) Arătați că, pentru orice $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, sistemul de ecuații are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și $4x_0z_0=1$.

SESIUNEA SPECIALA 19 mai 2026

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1-2a & a & 0\\ 2a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 1-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(1))=4$.

b) Arătați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-3ab)$, pentru orice numere reale a și b.

c) Determinați numărul real a pentru care $A(1)\cdot A(a)+A(5)=2A(4)$.

SIMULARE 24 mar 2026

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} ax+y+z=2a \\ x-y+az=-4 \\ 3x+2y+z=8 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(1))=4$.

b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

c) Considerăm (x_1,y_1,z_1) soluția sistemului de ecuații liniare pentru $a=1$. Pentru $a=2$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului de ecuații liniare pentru care $x_0y_0=y_1$.

MODEL M.E.N. noiembrie 2025

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1-a \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax-2z=4 \\ x+y+(1-a)z=3 \\ 2x+y-2z=5 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=2$.

b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

c) Pentru $a=2$, arătați că $x_0z_0+y_0\geq 0$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale.

TEST 1 Ilfov

Se consideră sistemul $\begin{cases} x-2y+3z=-1 \\ 3x+y-2z=1 \\ 5x+y+mz=n \end{cases}$, $m,n\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine parametrul real m pentru care determinantul matricei sistemului este nul.

b) Să se determine valorile reale ale lui m și n pentru care sistemul este incompatibil.

c) Să se arate că există o infinitate de valori ale lui m și n pentru care sistemul admite o soluție (x,y,z) cu x,y,z în progresie aritmetică.

TEST 2 Bihor

Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

a) Arătați că $\det(A(4))=-27$.

b) Demonstrați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y-xy)$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

c) Calculați $A(2)\cdot A(3)\cdot A(4)\cdot\ldots\cdot A(2026)$.

TEST 3 Brăila

Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+2ay+z=-1 \\ 2ax+y+(a+1)z=0 \end{cases}$, unde a este un număr real.

a) Rezolvați sistemul pentru $a=0$.

b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.

c) Pentru $a=-1$, determinați soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$.

TEST 4 Botoșani

Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+y+z=a-1 \\ x+ay+2z=-1 \end{cases}$ și matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Aflați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $det(A)=0$,

b) Aflați soluția (x_0,y_0,z_0) în cazul în care sistemul este compatibil determinat.

c) Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

TEST 5 Cluj

Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=I_3+A$, $C=I_3+a\cdot A$, cu $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $S=A-X\cdot Y$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $B\cdot C=I_3$.

c) Să se arate că $A^{n+1}=14\cdot A^n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

TEST 6 Călărași

Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m+1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & m+1 \\ 1 & m+1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (m+1)x-2y+z=m \\ -2x+y+(m+1)z=3m+3, \\ x+(m+1)y-2z=2m-3 \end{cases}$

unde m este un număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=0$.

b) Demonstrați că $A(m)$ este inversabilă dacă și numai dacă $m\neq 0$.

c) Pentru $m\neq 0$, demonstrați că singura soluție a sistemul de ecuații este $x=1$, $y=2$ și $z=3$.

TEST 7 Gorj

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay-2z=1 \\ x+y-z=a \end{cases}$, unde a este un număr real.

a) Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea A este inversabilă.

b) Determinați numărul real a pentru care ecuația $AX=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ **nu** are soluții reale,

unde $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

c) Pentru $a=1$, fie (x_0,y_0,z_0) o soluție reală a sistemului. Să se determine valoarea maximă a expresiei $x_0\cdot y_0$.

TEST 8 Iași

Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & m \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 3x+4y+mz=0 \end{cases}$, unde m este un număr real.

a) Arătați că $\det(A(m))=5-m$, pentru orice număr real m.

b) Determinați soluțiile reale ale sistemului pentru $m=5$.

c) Demonstrați că $A^n(5)\neq I_3$, pentru orice număr natural nenul n.

TEST 9 Olt

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & m \\ 1 & -m & 0 \end{pmatrix}$, unde m este un număr real.

a) Arătați că $\det(A)=0$, pentru orice număr real m.

b) Pentru $m=2$, verificați egalitatea $A\cdot(A^2+6I_3)=O_3$.

c) Demonstrați că matricea $B=I_3+xA$ este inversabilă, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ și pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

TEST 10 Suceava I

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+2y+z=0 \\ 2x+ay+z=0 \\ x-y+3z=0 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det\left(A(1)\right)=-9$.

b) Determinați numerele reale a pentru care sistemul de ecuații are soluții nenule.

c) Pentru $a=-2$, arătați că sistemul de ecuații are două soluții de forma (x_0,y_0,z_0) cu proprietatea că $x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=6$.

TEST 11 Suceava II

Se consideră matricele $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -e & e \end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det\left(A(-1)\right)=\frac{1}{e}$.

b) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

c) Determinați matricea $Y\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A(1)\cdot Y=B$.

TEST 12 Vaslui

Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2025^x \end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $detA(1)=2025$.

b) Determinați numerele întregi m și n, $m<n$, pentru care $A(m)\cdot A(n)=A(mn+4)$.

c) Demonstrați că, pentru orice număr real x, matricea $A(x)$ este inversabilă și $A^{-1}(x)=A(-x)$.