I. MODEL 2020

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ a & 4 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+2y+z=4 \\ ax+4y+z=6 \\ x-y+az=1 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(1))=0$.

b) Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ are rangul 2.

c) Determinați numărul real a, știind că sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

II. Simulare 2022

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & -1 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+3y+az=2 \\ 2x+y-z=-1 \\ ax+3y+z=1 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(1))=0$.

b) Arătați că $B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=a^3B(1)$, pentru orice număr real a, unde $B(a)=A(a)-A(0)$.

c) Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații are o infinitate de soluții, atunci $x_0y_0+y_0z_0+z_0x_0\le 0$, pentru orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale.

III. Examen 2017

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+2y+az=0 \\ -2x-y+3z=0 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(9))=0$.

b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.

c) Demonstrați că, dacă sistemul are soluția (x_0, y_0, z_0), cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, atunci $-x_0+y_0+z_0=11(x_0+y_0+z_0)$.

IV. Examen 2018

1. Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 1 & 2m & 1 \\ 1 & 1 & 2m \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2mx+y+z=-1 \\ x+2my+z=0 \\ x+y+2mz=1 \end{cases}$, unde m este număr real.

a) Arătaţi că $\det(M(0))=2$.

b) Determinaţi numerele reale m, ştiind că $\det(M(m))=0$.

c) Pentru $m=-1$, demonstraţi că, dacă (a,b,c) este o soluţie a sistemului, cel mult unul dintre numerele a, b şi c este întreg.

V Culegere probleme bacalaureat (Ed. Niculescu)

Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=7\cdot 2^a \\ 2x+3z=2^{a+3} \\ x+2^{-a}y+2^{-a}z=2^a+6 \end{cases}$, $a\in R$

- **a)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul este compatibil determinat.
- **b)** Pentru $a\neq 0$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului cu proprietatea $x_0^2+y_0^2+z_0^2=105$
- **c)** Pentru $a=0$, stabiliți natura sistemului și precizați mulțimea soluțiilor sale.