

Examenul de bacalaureat național

Proba E. c)

Matematică M-tehnic

Clasa a XII-a

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul  $(2 - 3i)^2 + 12i$  este întreg.
- 5p 2. Determinați  $m \in \mathbb{R}$  știind că între rădăcinile  $x_1, x_2$  ale ecuației  $x^2 - (2m + 1)x - 5 = 0$  există relația:  $x_1 + x_2 = 9$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:  $3^x + 2 \cdot 3^{x-1} = 15$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie pătrat perfect.
- 5p 5. Aflați  $a \in \mathbb{R}$  știind punctul  $M(1, 2)$  este mijlocul segmentului  $AB$ , unde  $A(a, 3)$  și  $B(3, 1)$ .
- 5p 6. Arătați că  $4 \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ = 0$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. În mulțimea matricelor pătratiche  $M_2(\mathbb{R})$  se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p a) Arătați că  $\det(A) = 0$ .
- 5p b) Arătați că  $A \cdot A - 4 \cdot A = O_2$ .
- 5p c) Determinați  $x \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\det(A + x \cdot I_2) = -3$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă  $x \circ y = xy - x - y + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p a) Calculați  $1 \circ 2024$ .
- 5p b) Arătați că  $x \circ y = (x - 1) \cdot (y - 1) + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:  $x \circ x \circ x = 9$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ , oricare ar fi  $x \in (0, \infty)$ .
- 5p b) Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției în care tangenta la grafic este paralelă cu axa  $Ox$ .
- 5p c) Arătați că  $f(x) \leq \frac{1}{e}$  pentru orice  $x \in (0, +\infty)$ .
2. Se consideră funcțiile  $F, f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x + 2024, f(x) = x + \frac{1}{x}$ .
- 5p a) Arătați că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .

5p b) Calculați  $\int e^x \left( f(x) - \frac{1}{x} \right) dx$ .

5p c) Arătați că  $\int_1^e (f(x) - x) \cdot \ln^{2023} x dx = \frac{1}{2024}$ .