

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2023**Proba E.c)****Matematică M_mate-info****Varianta 2**

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timp de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I**(30 puncte)**

- 5p** 1. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - 3$, $g(x) = 2 - 3x$. Determinați numărul real a pentru care $(f \circ g)(x) = a + (g \circ f)(x)$, oricare ar fi numărul real x .
- 5p** 2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_2(x+1) = 1 + \log_2(x+5)$.
- 5p** 3. Știind că numerele reale nenule m, n, p sunt în progresie geometrică, în această ordine, să se arate că ecuația $mx^2 - nx + p = 0$ nu are rădăcini reale.
- 5p** 4. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ care conțin cel puțin un număr par.
- 5p** 5. Se consideră punctele $M(1, 2)$, $N(2, 5)$ și $P(3, a)$, $a \in \mathbf{R}$. Să se determine valorile reale ale lui a astfel încât $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 5$.
- 5p** 6. Să se arate că $\sin 50^\circ \cdot \sin 130^\circ = \cos^2 140^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea**(30 puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & 2 \\ 1 & 2m-1 & 3 \\ 1 & m & m-3 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + my + 2z = 1 \\ x + (2m-1)y + 3z = 1 \\ x + my + (m-3)z = 2m-1 \end{cases}, m \in \mathbf{R}$
- 5p** a) Arătați că $\det(A(2)) = -3$.
- 5p** b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.
- 5p** c) Pentru $m=1$ determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) cu componente numere întregi, cu proprietatea $2x_0^2 + 3y_0^2 + 4z_0^2 = 2$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 3xy - 5x - 5y + 10$.
- 5p** a) Arătați că $x * y = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(y - \frac{5}{3}\right) + \frac{5}{3}$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $x * x = 10$.
- 5p** c) Determinați $n \in \mathbf{N}$, știind că $\left(3^n + \frac{5}{3}\right) * \left(3^{n+1} + \frac{5}{3}\right) * \left(3^{n+2} + \frac{5}{3}\right) = 3^{50} + \frac{5}{3}$.

SUBIECTUL al III-lea**(30 puncte)**

1. Fie funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x-2}{x} - \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = -\frac{x-2}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $x - y = 0$.
- 5p** c) Să se arate că $f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$.

2. Se consideră funcțiile $f : (-2, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x+2)^2 \cdot \ln(x+2)$ și $F : (-2, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$,

$$F(x) = \frac{(x+2)^3}{3} \cdot \ln(x+2) - \frac{(x+2)^3}{9} + \frac{1}{9} .$$

5p **a)** Arătați că F este o primitivă a funcției f .

5p **b)** Calculați $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{F(x)}{(x+1)^2}$.

5p **c)** Aflați primitiva funcției f , al cărei grafic conține punctul $A(-1, 1)$.