1. **Examen august 2023**

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x-1)^2$.

a) Arătați că $\int_3^7 \frac{f(x)}{(x-1)^2}dx=20$.

b) Arătați că $\int_2^3 \frac{x}{f(x)}dx=\frac{1}{2}$.

c) Arătați că $\int_0^1 \frac{xf(e^x)}{e^x}dx=\frac{e^2-5}{4}$.

2. **Examen BACALAUREAT IUNIE 2023**

Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+4\ln x$.

a) Arătați că $\int_1^2 (f(x)-4\ln x)dx=7$.

b) Arătați că $\int_1^e x(f(x)-3x^2)dx=e^2+1$.

c) Demonstrați că $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)F''(x)dx=\frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, pentru orice primitivă $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f.

3. **Examen iunie 2023 (sesiune specială)**

Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.

a) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x)-\frac{3}{x}\right)dx=\frac{15}{4}$.

b) Demonstrați că orice primitivă $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)$ este crescătoare.

c) Arătați că $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{f(x)}dx=\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$.

4. **MODEL 2023**

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x\ln x$.

a) Arătați că $\int_1^2 3\left(f(x)-x\ln x\right)dx=7$.

b) Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x^3}dx=2\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x+1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria strict mai mare decât 1.

5. TEST (Braila)

Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{x+1}$.

a) Calculați $\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)dx$.

b) Arătați că $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{4}{3}-\ln 2$.

c) Determinați numărul natural nenul n, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $\frac{1}{2}+\ln\left(n^2+n\right)$.

6. SIMULARE martie 2023

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$.

a) Arătați că $\int_3^5\left(f(x)-x^3\right)dx=8$.

b) Arătați că $\int_0^2 \frac{x^2}{f(x)-x+2}dx=\frac{\ln 5}{3}$.

c) Se consideră funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)e^{-x}}{x}$. Arătați că orice primitivă $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției g este concavă.

Test7 (Giurgiu)

Se consideră funcția f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x)=x-e^x.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2} - e$.

b) Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul

$I_n=\int_0^1 x^n(x - f(x))dx$.

Demonstrați că I_n+n I_{n-1}=e, pentru orice număr natural n, n≥ 2.

Test 8 (Dolj)

Se consideră funcțiile $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^x$ și $F: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$.

a) Determinați numerele reale a,b,c, știind că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Determinați primitiva G a funcției $g(x) = f(x) - 2e^x$, g: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, cu proprietatea că graficul lui G contine punctul A(0, 2).

c) Demonstrați că $\frac{e^2-1}{e^2} \leq \int_{-2}^0 f(x)dx \leq \frac{2e^2-2}{e^2}$.

Test 9 (Timiș)

Fie funcția $f: [1,2] \to R, f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2+1}}$.

a) Demonstrați că funcția $F: [1,2] \to R, F(x) = ln\frac{\sqrt{X^2+1}-1}{x}$ este o primitivă a funcției f.

b) Arătați că orice primitivă a funcției f este monotonă.

c) Calculați $\int f^2(x)\, dx$.

Test 10 (Vrancea)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 6}$

a) Arătați că $\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{13}{3}$.

b) Calculați $\int_1^2 \frac{x-2}{f(x)}dx$.

c) Arătați că $\sqrt{2} \leq \int_1^2 f(x)dx \leq \sqrt{3}$.

Test 11 (Călărași)

Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x^3+x$ și $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)\ln x$

a)Arătați că $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$.

b)Determinați o primitivă G a lui g cu proprietatea G(1)=0.

c) Arătați că $\int_0^a f(x)dx<\int_0^b f(x)dx \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$ cu $0<a<b$.

Test 12 (Iași)

. Fie funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(1+x)$.

a) Arătați că $\int_0^1 (f(x)+\ln(1+x))dx=\frac{5}{12}$.

b) Demonstrați că $\int_0^1 f(x)dx\geq 0$.

c) Demonstrați că $\int_0^1 (\ln(1+x)-x)dx\leq -\frac{1}{12}$.

Test 13 (Hunedoara)

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x+2}{x^2+2x+3}$.

a) Arătați că $\int_1^2 (x^3+2x^2+3x)\cdot f(x)\,dx=\frac{16}{3}$.

b) Calculați $\int_0^1\left(f(x)+\frac{x}{x^2+2x+3}\right)dx$.

c) Calculați $\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{\ln x}$, unde F este o primitivă a funcției f.

Test 14 (Brăila)

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x-x$.

a) Calculați $\int (x-f(x)+\ln x)dx$.

b) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este concavă pe intervalul $(1,\infty)$.

c) Determinați primitiva G a funcției $g:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=xf(x)$, al cărei grafic trece prin punctul $A\left(1,\frac{5}{12}\right)$.

Test 15 (Ilfov 1)

Se consideră funcția $f:(-2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+5}{x^2+5x+6}$.

a) Arătați că $\int_0^1 (x+2)(x+3)f(x)dx=6$.

b) Calculați $\int_1^2 f(x)dx$.

c) Demonstrați că orice primitivă $F:(-2,\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f este concavă.

Test 16 (Ilfov 2)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+2$

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{11}{6}$.

b) Calculați $\int_1^2 e^x(x^2-f(x))dx$.

c) Determinați numărul real pozitv supraunitar a, știind că

$$\int_1^a \frac{2x-1}{f(x)}dx=\ln 4$$

Test 17 (Maramureș)

Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$ și $F(x)=(x-a)e^x+b$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Determinați numerele reale a,b știind că F este o primitivă a funcției f.

b) Pentru $a=2$ și $b=e$, calculați $\lim\limits_{x\to 1}\frac{F(x)}{(x-1)^2}$.

c) Arătați că orice primitivă a funcției F este convexă pe intervalul $[1,\infty)$.