1. **Examen august 2023**

Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x+\ln(x+1)$.

a) Arătați că $\int_1^2 (f(x)-\ln(x+1))dx=9$.

b) Arătați că $\int_0^{e-1}\frac{f(x)-6x}{x+1}dx=\frac{1}{2}$.

c) Determinați numărul real a, știind că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x^2)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ este egală cu $a\pi+\ln 2$.

2. **Examen BACALAUREAT IUNIE 2023**

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+2x)e^{-x}$.

a) Arătați că $\int_0^3 f(x)e^x dx=18$.

b) Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2}dx=\frac{e-2}{e}$.

c) Demonstrați că $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\right)=1$.

3. **Examen iunie 2023 (sesiune specială)**

Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x}{x^3+8}$.

a) Arătați că $\int_0^2 (x^3+8)f(x)dx=8$.

b) Arătați că $\int_1^4 xf(x)dx=4\ln 2$.

c) Calculați $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x t\cdot f(t)dt\right)$.

4. MODEL 2023

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+e^x}{1+e^{-x}}$.

a) Arătați că $\int_0^3\left(1+e^{-x}\right)f(x)dx=8+e^3$.

b) Arătați că $\int_{-m}^{m}\dfrac{f(x)}{x^2+e^x}dx=m$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.

c) Determinați numărul real nenul a pentru care $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^{ax}-1}\int_0^x f(t)dt\right)=1$.

5. TEST (Braila)

Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx$.

a) Calculați I_2.

b) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

c) Demonstrați că $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}$, pentru orice $n\geq 2$.

6. SIMULARE martie 2023

Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+3}}$.

a) Arătați că $\int_0^3 f(x)\sqrt{x+3}\,dx=12$.

b) Arătați că $\int_{-2}^{1}\dfrac{f(x)}{x^2+1}dx=2$.

c) Demonstrați că $\int_0^1\dfrac{1}{f(x)}dx\leq\dfrac{\pi}{2}$.

Test7 (Giurgiu)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

a) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Arătați că $\int_0^1 \dfrac{f(x)+x^2f(x)}{x^4+1}dx=\dfrac{\pi}{8}$.

c) Calculați $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$.

Test 8 (Dolj)

Se consideră funcțiile $f, F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=arctgx, F(x)=\int_0^x f(t)dt.$

a) Arătați că funcția F este convexă pe **R**.

b) Determinați primitiva G a funcției g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, g(x)=xf(x) cu proprietatea că graficul lui G contine punctul A$(1,-\frac{1}{2})$.

c)Calculați $\lim_{x\to 0}\frac{F(x^2)}{x^4}$.

Test 9 (Timiș)

Se consideră funcțiile $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$ și $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ g(x)=e^x\sin x$.

a) Verificați dacă funcția g este o primitivă a funcției f.

b) Determinați primitiva funcției g a cărei reprezentare grafică conține punctul O(0,0).

c) Arătați că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Test 10 (Vrancea)

Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^1\frac{t^x}{t+1}dt$

a) Calculați $f(1)$.

b) Arătați că $f(x+1)+f(x)=\frac{1}{x+1}$.

c) Arătați că $f(x)\geq\dfrac{1}{2(x+1)}, \forall x\in(1,\infty)$

Test 11 (Călărași)

Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x^3+x$ și $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x$.

a) Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(-x)+2f(x)\right)dx=0$.

b) Fie $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=f(x)e^{x^2}$. Arătați că orice primitivă a lui h este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Determinați o primitivă G a funcției g cu proprietatea $G(1)=0$.

Test 12 (Iași)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

b) Determinați $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\int_0^a f(\operatorname{tg}x)dx=\frac{\pi+2\sqrt{2}}{4}$.

c) Demonstrați că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt=0$.

Test 13 (Hunedoara)

Fie funcția $f_{p,q}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_{p,q}(x)=(\sin x)^p\cdot(\cos x)^q$, unde $p,q\in\mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=-\frac{1}{4}\cos 2x$ este o primitivă a funcției $f_{1,1}$;

b) Calculați $\int_0^{\pi/2} f_{3,1}(x)dx$;

c) Fie F o primitivă a funcției $f_{2022,2023}$. Demonstrați că există un număr real k astfel încât $F(x+2\pi)-F(x)=k$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Test 14 (Brăila)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+2\right)e^{-x}$.

a) Calculați $\int f(x)\cdot e^x dx$.

b) Calculați $\int g(x)dx$, unde $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(\ln x)$.

c) Determinați numerele reale a și b, știind că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^{-x}\left(-x^2+ax+b\right)$ este o primitivă a funcției f.

TEST 15 ICHB

Fie $f: R \to R, f(x) = e^{-x^2}$ $și$ $F: R \to R$ o primitivă a sa.

a) Arătași că $\int_0^1 x \cdot f(x)dx = \frac{e-1}{2e}$
b) Calculați $\lim_{x\to 0} \frac{F(\cos x)-F(1)}{x^2}$
c) Demonstrați că funcția $g: R \to R, g(x) = F(x) + f(x)$ are exact un punct de extrem local.

Test 16 (Dâmbovița)

Se consideră funcția $f: R \to R, f(x) = cosx$.

a) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx f(x)\, dx = \frac{1}{2}$.

b) Calculați $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

c) Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^n dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Test 17 (Ilfov 1)

Se consideră funcția $f: (-1; \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{3}{x+1}$.

a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x)dx = 3ln2$.
b) Calculați $\int_e^{e^2} \left(f(x) - \frac{3}{x+1}\right) lnxdx$.
c) Arătați că $\int_0^1 2f(x)F(x)dx = \frac{1}{4} + ln8 + 9ln^2 2$, unde F este primitiva funcției f pentru care F(0)=0.

Test 18 (Ilfov 2)

Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{e^x} + \frac{x-2}{x}$. și funcția $F: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = -e^{-x} + x - 2\ln(x)$.

a) Aratați că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Calculați $\int xf(x)dx$.

c) Determinați primitiva $G : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a funcției f, al cărei grafic conține punctul $M(1, \frac{e+1}{e})$.

Test 19 (Maramureș)

Se consideră funcțiile $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f_n(x)=\dfrac{x^n}{x^2+4}, n\in\mathrm{N}$.

a) Arătați că $F_1:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, F_1(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)$ este o primitivă a funcției f_1 ;

b) Determinați o primitivă a funcției f_2 a cărei reprezentare grafică trece prin punctul $A\left(2,-\dfrac{\pi}{2}\right)$;

c) Arătați că orice primitivă a funcției f_4 este bijectivă.