

1. Examen august 2023

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 3x$.

a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 3x) dx = 15$.

b) Arătați că $\int_2^5 \frac{1}{f(x) - 4x^3 + 3} dx = \frac{1}{3} \ln 2$.

c) Demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției

$g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x^3 + f(x)}{x}$ este egal cu $2\pi f(3)$.

2. Examen august 2023 (rezerva)

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 1$.

a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 1) dx = \frac{2}{3}$.

b) Arătați că $\int_0^2 \frac{4x}{f(x)} dx = 2 \ln 3$.

c) Determinați numărul natural n , știind că $\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \ln x dx = f(n) - \frac{4}{e}$.

3. Examen BACALAUREAT iunie 2023

Se consideră funcția $f : (-9, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{8x}{x+9}$.

a) Arătați că $\int_0^1 (x+9) \cdot f(x) dx = 4$.

b) Arătați că $\int_1^6 \frac{1}{8x} \cdot f(x) dx = \ln \frac{3}{2}$.

c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^3 f(x^2) dx = 6(4 + a\pi)$.

4. Examen iunie 2023 (sesiune specială)

Se consideră funcția $f: \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \frac{6}{2x+3}$.

a) Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{6}{2x+3}\right) dx = e(e^2 - 1)$.

b) Arătați că $\int_{-1}^0 (f(x) - e^x) dx = 3 \ln 3$.

c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g: \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (2x^2 + 3x)f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $2(e+1)$.

5. MODEL 2023

Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

a) Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) dx = 6$.

b) Arătați că $\int_0^8 (f(x) - x - 1) dx = 4$.

c) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, este egal cu $\pi \left(\frac{91}{3} + \ln 4\right)$.

6. TEST (Braila)

Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

a) Arătați că $\int_1^3 xf(x) dx = \frac{32}{3}$.

b) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) e^x dx = e^2$.

c) Determinați numărul real a , $a > 1$, pentru care aria suprafeței plane delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a$, este egală cu $4 + \ln a$.

7. SIMULARE martie 2023

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$.

a) Arătați că $\int_0^2 (f(x) - 4x) dx = 12$.

b) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 3x^2 - 2) e^x dx = 4$.

c) Determinați $a \in (0, +\infty)$ pentru care $\int_{-1}^0 a \cdot f'(x) \cdot (f(x))^{a-1} dx = 63$.

Test8 (Giurgiu)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(x^2 + 1) - 2$

a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - x + 2) dx = 0$.

b) Calculați $\int_0^1 (f(x) - x^3 + 2) e^x dx$.

c) Determinați numărul real pozitiv m , știind $\int_1^2 f(x) dx = m^2 + 1$.

Test 9 (Cluj)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2+1}$.

a) Arătați că $\int_{-1}^1 \left(f(x) - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{2}{3}$.

b) Determinați numărul natural n , știind că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{n^2}{3} + \frac{\pi}{4} - 1$.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$, unde $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f .

Test 10 (Dolj)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$.

a) Să se calculeze $\int [f(x) - (x^2 + 1) \cdot e^x] dx$.

b) Să se calculeze $\int \frac{f(x)}{(x^2+x+1)(e^x+2)} dx$

c) Să se determine punctele de inflexiune ale primitivei $F(x)$ a funcției $f(x)$.

Test 11 (Timiș)

Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$, $g(x) = x(x+2)e^x$.

- Demonstrați că funcția f este o primitivă a funcției g .
- Calculați $\int \frac{g(x)}{f(x)} dx$, $x \in (0, +\infty)$.
- Demonstrați că orice primitivă a funcției $h: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$ este concavă.

Test 12 (Vrancea)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 3e^{2x} + \frac{2}{x^2+1}$ și $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a lui f .

- Arătați că funcția F este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
- Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x}$.
- Dacă $F(0) = 1$, calculați $F(1)$.

Test 13 (Călărași)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + x$.

- Arătați că $\int_0^2 (f(x) - 4x^3) dx = 2$.
- Calculați $\int_1^e \left(\frac{f(x)}{x^2} \right) dx$.
- Determinați primitiva $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3f(e^x)$ pentru care $G(0) = 0$.

Test 14 (Iasi)

Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}$.

- Arătați că $\int_1^e \left(f(x) - \frac{1}{x+1} \right) dx = 1$.
- Demonstrați că funcția $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \ln(x^2 + x) - \ln 2$ este o primitivă a funcției f .
- Demonstrați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

Test 15 (Hunedoara)

Se consideră funcțiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 - 3x - 3)$, $F(x) = e^x(x^2 - 5x + 2)$.

- Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f .
- Arătați că $\int_{-2}^{-1} f(x) dx = \frac{8e-16}{e^2}$.
- Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției F .

Test 16 (Brăila)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x - x^2}{e^x}$.

- Calculați $\int f(x)e^x dx$.
- Demonstrați că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x^2}{e^x}$ este o primitivă a funcției f .
- Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este crescătoare pe $[0, 2]$.

Test 17 (Botoșani)

Pentru orice număr real a , definim funcția $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin $f_a(x) = x^2 - ax + a^2$.

- Arătați că $\int_0^3 f_0(x) dx = 9$.
- Arătați că $\int_1^e (f_0(x) \cdot \ln x) dx = \frac{2e^3 + 1}{9}$.
- Determinați valoarea minimă pentru $\int_0^2 f_a(x) dx$, $a \in \mathbb{R}$.

Test 18 (Ilfov 1)

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \leq 1 \\ \ln x + 1, & x > 1 \end{cases}$.

- Să se arate ca funcția f admite primitive pe \mathbb{R} ,
- Să se determine o primitivă a funcției f pe intervalul $(-\infty, 1)$ pentru care $F(-1) = 2$,
- Să se arate că orice primitivă F a funcției f este crescătoare pe $(1, \infty)$.

Test 19 (Ilfov 2)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

- Calculați $\int \frac{f(x)}{e^x} dx$, $x \in \mathbb{R}$.
- Determinați primitivă F a funcției f , care verifică relația $F(0) = 2022$.
- Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $[-1, \infty)$.

Test 20 (Maramures)

Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)e^x$ și $g(x) = (x + 2)e^x$.

- Demonstrați că funcția f este o primitivă a funcției g .
- Determinați valorile reale ale lui x pentru care primitivă funcției g este convexă.
- Calculați $\int f(x) \cdot g(x) dx$.