1. Examen 2022 (iunie)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-x+\sqrt{x^2+9}$.

a) Arătați că $\int_1^5\left(f(x)-\sqrt{x^2+9}\right)dx=0$.

b) Arătați că $\int_0^4\frac{x}{f(x)+x-3}dx=2$.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

2. Examen 2022 (sesiunea august)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+4}$.

a) Arătați că $\int_0^2\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+4}}dx=2$.

b) Arătați că $\int_0^{\sqrt{5}}f(x)dx=\frac{19}{3}$.

c) Pentru fiecare număr natural n, $n\geq 2$, se consideră numărul $I_n=\int_1^2\frac{x^n}{f^2(x)}dx$. Determinați numărul natural n, $n\geq 2$, pentru care $I_{n+2}+4I_n=\frac{3}{n-1}$.

3. Examen 2022 (sesiunea specială, mai)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x+\frac{1}{e^x+1}$.

a) Arătați că $\int_0^2\left(f(x)-\frac{1}{e^x+1}\right)dx=e^2+1$.

b) Arătați că $\int_{-1}^1 e^x\left(f(x)-x-e^x\right)dx=1$.

c) Determinați numărul real m pentru care $\int_0^1 x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\frac{m}{2}-\frac{2}{e}$.

4. MODEL OFICIAL (nov.)

Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x-1)$.

a) Arătați că $\int_4^6 \frac{f(x)}{\ln(x-1)}dx=10$.

b) Demonstrați că $F\left(\sqrt{7}\right)<F(3)$, pentru orice primitivă F a funcției f.

c) Determinați numărul real m, știind că $\int_3^5 f(x)dx=m(4\ln 2-1)$.

Test 5 (Brăila,mai)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2x}{x^2+3}-\frac{2}{x^2+3}$.

a) Arătați că $\int_1^2 \left(x^2+3\right)\cdot f(x)dx=\frac{1}{3}$.

b) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=1-\ln\frac{4}{3}-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)dx$. Arătați că $\lim_{n\to\infty} I_n=0$.

6. SIMULARE (martie)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$.

a) Arătați că $\int_0^3 e^x f(x)dx=12$.

b) Arătați că orice primitivă G a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ este convexă.

c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}}dx=\frac{a-\sqrt{2}}{3}$.

Test 7 (Olt,mar.)

Se consideră funcțiile $f:(-1,+\infty)\to R$, $f(x)=x-\ln(1+x)$ și $F:(-1,+\infty)\to R$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

a) Verificați egalitatea $F(1)=\frac{3}{2}-2\ln 2$.

b) Calculați $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^3}$.

c) Arătați că F este funcție crescătoare.

Test8 (Constanta,feb.) ver.2

Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=e^x\cdot\left(2x^2+3x+4\right)$ și $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ F(x)=e^x\cdot\left(ax^2+bx+c\right)$

a) Să se determine $a,b,c\in\mathbf{R}$ astfel încât funcția F să fie primitiva funcției f.

b) Aflați primitiva funcției f, al cărei grafic conține punctul A(0;2).

c) Arătați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $\mathbf{R}$.

Test 9 (Constanta, feb.) ver.3

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-5x+2$.

a) Arătați că $\int_1^2 (f(x)+5x-2)dx=\frac{7}{3}$.

b) Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f al cărei grafic conține punctul A(0, 3).

c) Calculați $\int_0^1 (f(x)-x^2+6x-2)e^x dx$.

Test 9’ (Constanta, feb.) ver.3rez

Se consideră fncția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=e^x\cdot\left(2x^2+3x+4\right)$ și $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ F(x)=e^x\cdot\left(ax^2+bx+c\right)$

a) Să se determine $a,b,c\in\mathbf{R}$ astfel încât funcția F să fie primitiva funcției f.

b) Aflați primitiva funcției f, al cărei grafic conține punctul A(0;2).

c) Arătați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $\mathbf{R}$.

Test 10 (Călărași, feb.)

Se consideră funcțiile $F,\ f:\left[\frac{2}{\pi},+\infty\right)\to\mathbb{R},\quad F(x)=-\sin\frac{1}{x},\quad f(x)=\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$ și șirul $(I_n)_{n\ge1}$, unde $I_n=\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{n} f(t)dt$.

a) Arătați că $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} F\left(\frac{1}{x}\right)dx=-\frac{1}{2}$.

b) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Test 11 (Constanta,ian.) ver.1

Se consideră funcția $f:(-\infty,0)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x\sqrt{1-x}$.

a) Calculați $\int \frac{f^2(x)}{x}dx$, $x\in(-\infty,0)$.

b) Determinați numerele reale a,b,c astfel încât funcția $F:(-\infty,0)\to\mathbf{R}$, $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{1-x}$ să fie o primitivă a funcției f.

c) Fie $G:(-\infty,0)\to\mathbf{R}$ o primitivă a funcției f. Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{G(x)}{\sqrt{(-x)^5}}$.

Test 12 (Iasi, ian.)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{3x^2+1}$.

a) Arătați că $\int_{-1}^{1} f^2(x)dx=4$.

b) Determinați primitiva F a funcției f cu proprietatea că $F(0)=0$, ținând cont eventual de faptul că funcția F este de forma $F(x)=ax\sqrt{3x^2+1}+b\ln\left(x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2+1}\right)+c, x\in\mathbb{R}$, unde a, b și c sunt numere reale.

c) Demonstrați că $2\le\int_{-1}^{1} f(x)dx\le 3$.