

1. Examen august 2023

Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + x - 2}$.

- a) Arătați că $f'(x) = \frac{3x(x-4)}{(x^2 + x - 2)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.
- b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- c) Demonstrați că $f(x) + f(x^2) \geq \frac{17}{3}$, pentru orice $x \in (1, 2]$.

2. Examen BACALAUREAT IUNIE 2023

Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + \frac{4x-4}{x^2}$.

- a) Arătați că $f'(x) = \frac{4(2-x)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- c) Demonstrați că $|f(x) - f(y)| \leq 1$, pentru orice $x, y \in [1, +\infty)$.

3. Examen iunie 2023 (sesiune specială)

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 + 2x - 2)$.

- a) Arătați că $f'(x) = e^x(x^2 + 4x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = 1$.
- c) Demonstrați că $e^{x+4}(x^2 + 2x - 2) \leq 6$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$.

4. MODEL 2023

Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$.

- a) Arătați că $f'(x) = 1 - \frac{2x+1}{2e^x\sqrt{x+1}}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- c) Demonstrați că $f(x) - x \leq \sqrt{\frac{e}{2}}$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$.

5. TEST (Braila)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} - x - 2$.

- Arătați că $f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- Demonstrați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- Demonstrați că imaginea funcției f este intervalul $(0, +\infty)$.

6. SIMULARE martie 2023

Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1+\ln x}{x}$.

- Arătați că $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- Demonstrați că $\frac{\ln y}{y} - \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, pentru orice $x, y \in (1, +\infty)$ cu $x < y$.

Test7 (Giurgiu)

Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - (x+1)\ln(x+1)$

- Arătați că $f'(x) = 1 - \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$.
- Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .
- Demonstrați că funcția f este concavă.

Test 8 (Dolj)

Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

- Arătați că $f'(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Determinați ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f către $-\infty$.
- Determinați imaginea funcției, $\text{Im}f$.

Test 9 (Timis)

Fie funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax+2}{x-1}$, unde $a \in \mathbb{R}$

- Determinați valoarea numărului real a , știind că graficul funcției f admite dreapta de ecuație $y = 2$ ca asimptotă orizontală la $+\infty$.
- Pentru $a = 2$, demonstrați că funcția f este strict descrescătoare.
- Pentru $a = 2$, demonstrați că $f(3\sqrt{2}) < f(2\sqrt{3})$.

Test 10 (Vrancea)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

- Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$.
- Să se determine ecuația tangentei la graficul lui f în punctul de intersecție al graficului cu axa Ox .
- Folosind monotonia funcției f să se arate că $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$

Test 11 (Călărași)

Se consideră funcția $f : (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

- Arătați că $f'(x) = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}$.
- Determinați intervalele de convexitate ale funcției f .
- Determinați numerele reale a și b pentru care dreapta $d : x + ay + b = 0$ este tangentă la graficul funcției în punctul de abscisă zero.

Test 12 (Iași)

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

- Arătați că $f'(x) = \frac{3(x+1)}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- Determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f .
- Arătați că $\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^4+x^2+1} \geq \frac{2-x-x^2}{2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Test 13 (Hunedoara)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \frac{x-1}{2x}$.

- Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$.
- Arătați că $\ln x \geq \frac{x-1}{2x}$, $\forall x \in (1, \infty)$.
- Determinați numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f .

Test 14 (Brăila)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$.

- Arătați că $f'(x) = \frac{(3-x)(x+1)}{(x^2+3)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- Demonstrați că $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{6}$, pentru orice număr real x .

Test 15 (Ilfov 1)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^4+48}$.

- Arătați că $f'(x) = -\frac{3(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x^4+48)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f , în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f .
- Demonstrați că $-\frac{1}{32} \leq f(x) \leq \frac{1}{32}$, pentru orice număr real x .

Test 16 (Ilfov 2)

Se consideră funcția $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2 \ln x$.

- Să se arate că $f'(x) + f''(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}$
- Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0; 2)$
- Să se arate că $x - 2 \geq 2 \ln \frac{x}{2}$, oricare ar fi $x \in (0; \infty)$

Test 17 (Maramures)

Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- Determinați asimptotele funcției f .
- Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .
- Arătați că $f(x) \leq \frac{1}{e}$, $\forall x \in (0, \infty)$.