1. **Examen august 2023**

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3e^x}{x^2+x+1}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{3e^x\left(x^2-x\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=+\infty$.

c) Demonstrați că ecuația $f(x)=m$ are exact trei soluții, pentru orice $m\in(e,3)$.

2. **Examen BACALAUREAT IUNIE 2023**

Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3\ln\dfrac{x+3}{x-1}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{(x-1)(x+3)}$, $x\in(1,+\infty)$.

b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Arătați că $\ln\dfrac{x+3}{3(x-1)}\geq 1-\dfrac{x}{3}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

3. **Examen iunie 2023 (sesiune specială)**

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{5}-\ln\left(x^2+x+5\right)$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{x^2-9x}{5\left(x^2+x+5\right)}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

c) Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică.

4. **MODEL 2023**

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x-\left(x^4-1\right)\operatorname{arctg}x$.

a) Arătați că $f'(x)=-x^2\left(4x\operatorname{arctg}x+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f care este paralelă cu axa Ox.

c) Demonstrați că $\operatorname{tg}(f(x))\geq f(x)\geq f(\operatorname{tg}x)$, pentru orice $x\in[0,1]$.

5. TEST (Braila)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x+1}{e^x}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{1-2x}{e^x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Arătați că $(2x+1)\sqrt{e}\le 2e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

6. SIMULARE martie 2023

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1-\ln\left(e^x+x^2\right)$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-2)}{e^x+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați numerele reale a pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a,f(a))$ este paralelă cu axa Ox.

c) Determinați imaginea funcției f.

Test7 (Giurgiu)

Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-\ln(x+1)$.

a) Calculați $f'(x), x\in(-1,+\infty)$.

b) Calculați $\lim_{x\to 1}\frac{x-f(x)-\ln 2}{x-1}$.

c) Demonstrați că $\ln(x+1)\le x$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

Test 8 (Dolj)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R}$, definite prin $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+2}$.

a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

b) Determinați punctele de extrem local ale funcției f.

c) Se consideră șirul $(a_n)_{n\ge1}, a_1=2$ și $a_{n+1}=f(a_n), pentru\ n\ge1, n\in N$. Studiați convergența șirului $(a_n)_{n\ge1}$ și în caz de convergență, calculați limita șirului.

Test 9 (Timiș)

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to \boldsymbol{R},\ f(x)=1-\frac{1}{x}-\ln x$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$.

b) Demonstrați că funcția are o singură asimptotă.

c) Demonstrați că $1+x\ln x\geq x$, pentru orice număr real x strict pozitiv.

Test 10 (Vrancea)

Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x-1}, x\in(0,\infty)\setminus\{1\}\\ 1, x=1\end{cases}$.

a) Arătați că f este continuă în punctul $x_0=1$.

b) Stabiliți dacă f este derivabilă în punctul $x_0=1$.

c) Arătați că f este descrescătoare.

Test 11 (Călărași)

Se consideră funcția $f:(-2,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+1}{x+2}e^x$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{(x^2+3x+3)e^x}{(x+2)^2}$ oricare ar fi $x\in(-2,\infty)$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{-x}\sqrt{f(2x)}\right)^x$.

c) Demonstrați că funcția f este inversabilă și arătați că $f'(0)\cdot\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

Test 12 (Iași)

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\setminus\left\{\frac{1}{e}\right\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x}{1+\ln x}$.

a) Studiați existența asimptotelor verticale la graficul funcției f.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $P(x_0, f(x_0))$, care este paralelă cu dreapta d, de ecuație $x-4y+2023=0$.

c) Demonstrați că $\ln\left(1+\sqrt{1+n^2}\right)\leq\sqrt{1+n^2}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

Test 13 (Hunedoara)

Se consideră funcţia $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

a) Demonstraţi că ecuaţia $f'(x)=0$ are o singură soluţie în intervalul $(1,\infty)$;

b) Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f;

c) Demonstraţi că $f(\lg 99)+f(\lg 101)<f(\lg 97)+f(\lg 103)$.

Test 14 (Brăila)

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$.

a) Calculaţi $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

b) Calculaţi $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

c) Demonstraţi că $f\left(2\sqrt{3}\right)<f\left(3\sqrt{2}\right)$.

TEST 15 ICHB

Se consideră funcția $f: R\to R, f(x)=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
b) Demonstrați că f este inversabilă
c) Arătați că $f(x)<x, \forall x>0$

Test 16 (Dâmbovița)

Se consideră funcția $f: R\to R, f(x)=e^x(x^2-4x+1)$.

a) Arătați că $f'(x)==e^x(x-3)(x+1)$
b) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției *f*, în care tangenta la graficul funcției *f* este paralelă cu dreapta de ecuați *y=2022*
c) Determinați valorile reale ale lui *a*, știind că graficul funcției *f* intersectează dreapta de ecuație *y=a* în exact trei puncte.

Test 17 (Ilfov 1)

Se consideră funcția $f:(-3;\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-ln(x+3)$.

a) Arătați că $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+3}, x\in(-3,\infty)$.
b) Calculați $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x+2}$.
c) Demonstrați că funcția f este convexă pe $(-3;\infty)$.

Test 18 (Ilfov 2)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

b) Arătați că $f'(x) = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

b) Determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Determinați imaginea funcției f.

Test 19 (Maramureș)

Se consideră funcția $f:(-1,\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}, \forall x \in (-1,\infty)$;

b) Calculați $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}$;

c) Demonstrați că $\ln(x+1) \geq \frac{x}{x+1}, \forall x \in (-1,\infty)$.