

1. Examen 2022 (iunie)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + \frac{x}{e^x - x}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .

c) Demonstrați că, pentru orice $m \in (1, 2]$, ecuația $f(x) = m$ are soluție unică.

2. Examen 2022 (sesiunea august)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{e^x}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(4-x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f .

c) Demonstrați că ecuația $f(x) = n$ are soluție unică, pentru orice număr natural nenul n .

3. Examen 2022 (sesiunea specială, mai)

Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 5x + 10)\sqrt{x}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{5(x^2 - 3x + 2)}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$.

b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .

c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x^2\sqrt{x}} \right)^{\frac{x}{5}} = \frac{1}{e}$.

4. MODEL OFICIAL (nov.)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^3 + 3x + 1)e^{-x}$.

a) Arătați că $f'(x) = (2-x)(x^2 - x + 1)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x) - e^{-x}}{f(x) + e^{-x}} \right)^{f(x)e^x} = e^{-2}$.

c) Demonstrați că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \left| \frac{f(x)}{e^{-x}} - 1 \right|$ are un singur punct de extrem.

Test 5 (Brăila, mai)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - \ln(x^2 + 1)$.

- Arătați că $f'(x) = \frac{2(2x^2 - x + 2)}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- Demonstrați că funcția f este bijectivă.

6. SIMULARE (martie)

Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 16}}{x}$.

- Arătați că $f'(x) = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2 \sqrt{x^4 + 16}}$, $x \in (0, +\infty)$.
- Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x) + f\left(\frac{4}{x}\right) = m$ are exact două soluții.

Test 7 (Olt, mar.)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

- Calculați $f'(0)$.
- Arătați că funcția f' este strict descrescătoare pe \mathbb{R} .
- Determinați asimptotele graficului funcției f .

Test8 (Constanta, feb.) ver.2

Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$

- Să se arate că $x^2 \cdot f'(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$, $\forall x \in (0, +\infty)$
- Să se arate că graficul funcției admite o singură asimptotă.
- Determinați cel mai mic număr întreg a pentru care $f(x) < a$.

Test 9 (Constanta, feb.) ver.3

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 12x + 20$.

- Arătați că $f'(x) = 3(x^2 - 4)$, $x \in \mathbb{R}$.
- Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției.
- Demonstrați că $f(x) \geq 4$, pentru orice $x \in [-2, \infty)$.

Test 9' (Constanta, feb.) ver.3rez

Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$

- a) Să se arate că $x^2 \cdot f'(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$, $\forall x \in (0, +\infty)$
 b) Să se arate că graficul funcției admite o singură asimptotă.
 c) Determinați cel mai mic număr întreg a pentru care $f(x) < a$.

Test 10 (Călărași, feb.)

Se consideră funcția $f: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x \ln x - (1-x) \ln(1-x), & \text{dacă } x \in (0,1) \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$.

- a) Verificați dacă $f'(x) = \ln \frac{1-x}{x}$, oricare ar fi $x \in (0,1)$.
 b) Arătați că funcția f este continuă în $x=0$.
 c) Dacă $a, b \in (0,1)$ și $a+b=1$, atunci demonstrați că $a \ln a + b \ln b \geq \ln \frac{1}{2}$.

Test 11 (Constanta, ian.) ver.1

Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x \cdot \arctg x - \ln(x^2+1)$.

- a) Arătați că $f'(x) = \arctg x - \frac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbf{R}$.
 b) Demonstrați că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .
 c) Fie funcția $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = f'(x)$. Determinați imaginea funcției g .

Test 12 (Iasi, ian.)

Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$.

- a) Arătați că $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.
 b) Arătați că există un singur punct A situat pe graficul funcției f cu proprietatea că tangenta în A la graficul funcției f este o dreaptă orizontală și determinați coordonatele acestui punct.
 c) Demonstrați că $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.