

1. Examen august 2023

Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + mX - 3$, unde m este număr real.

- Pentru $m = 0$, arătați că $f(1) = 0$.
- Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $X + 1$.
- Determinați numărul real m pentru care $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = x_1 x_2 x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

2. Examen BACALAUREAT IUNIE 2023

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x^2 - 4xy + 3y^2$.

- Arătați că $0 \circ 2 = 12$.
- Determinați numerele reale x pentru care $(2x) \circ x = -1$.
- Determinați perechile (m, n) de numere întregi, cu $m < n$, pentru care $m \circ n = 3$.

3. Examen iunie 2023 (sesiune specială)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - x - y + 4$.

- Arătați că $0 \circ 3 = 1$.
- Determinați numerele reale x pentru care $x \circ x = 3x$.
- Determinați numărul real a , știind că $x \circ a = x + a$, pentru orice număr real x .

4. MODEL 2023

Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 2X + m$, unde m este număr real.

- Pentru $m = 6$, arătați că $f(-1) = 0$.
- Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g = X^2 + 2$.
- Determinați numărul real m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

5. TEST (Braila)

Se consideră polinomul $f = X^3 + (m - 3)X^2 - 17X + (2m + 7)$, cu $m \in \mathbb{R}$.

- Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X - 1$.
- Pentru $m = 4$ arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -62$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^x + 9^x - 17 \cdot 3^x + 15 = 0$.

6. SIMULARE martie 2023

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy + x + y - 1 + 2^{xy}$.

- Arătați că $1 * 2 = 8$.
- Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- Determinați numărul natural nenul n pentru care $n * \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$.

Test7 (Giurgiu)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 4x + 4y - 4xy - 3$.

- Demonstrați că $x * y = 1 - 4(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x și y .
- Arătați că $x * \frac{1}{x} \geq 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
- Determinați numerele reale x pentru care $x * x * x * x = x$.

Test 8 (Dolj)

Pe mulțimea numerelor reale strict pozitive se definește legea de compoziție $x * y = x \ln \sqrt[3]{y}$.

- Arătați că $2 * 1 = 1$.
- Demonstrați că e^3 este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- Rezolvați în mulțimea numerelor reale pozitive ecuația $x * x = e^3$.

Test 9 (Timiș)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție:

$$x * y = xy - 6x - 6y + 42, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- Demonstrați că $a * C_4^2 = C_4^2 * a = C_4^2, \forall a \in \mathbb{R}$.
- Demonstrați că legea * este asociativă.
- Calculați $1 * 2 * 3 * \dots * 2023$.

Test 10 (Vrancea)

Se consideră pe mulțimea $G = (-2, 2)$ legea de compoziție $x * y = \frac{4x + 4y}{4 + xy}$

- Arătați că 0 este elementul neutru al legii de compoziție *.
- Rezolvați în G ecuația $x * x = 8/5$
- Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow G, f(x) = \frac{2(x-1)}{x+1}$. Aratati ca $f(xy) = f(x) * f(y)$, orice $x, y > 0$

Test 11 (Călărași)

Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă

$$x \circ y = 3 - (x - 3)(y - 3).$$

- Arătați că $2 \circ 2023 = 2023$.
- Determinați numerele elementele simetrizabile care sunt egale cu simetricile lor în raport cu legea de compoziție.
- Rezolvați în \mathbb{Z} ecuația $x \circ x \circ x = x$.

Test 12 (Iasi)

Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 2xy - 6(x + y) + 21$.

- Arătați că $x * y = 2(x - 3)(y - 3) + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- Demonstrați că $N = \sqrt[3]{-2023} * \sqrt[3]{-2022} * \sqrt[3]{-2021} * \dots * \sqrt[3]{2021} * \sqrt[3]{2022} * \sqrt[3]{2023}$ este număr natural.
- Știind că $(G, *)$ este grup, arătați că funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow G$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ este un izomorfism de la grupul $((0, +\infty), \cdot)$ la grupul $(G, *)$, unde $G = (3, +\infty)$ și „ \cdot ” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

Test 13 (Hunedoara)

Pe mulțimea $G = (8, \infty)$ se definește legea de compoziție: $x \circ y = xy - 8x - 8y + 72$, $\forall x, y \in G$.

- Demonstrați că G este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea de compoziție „ \circ ”.
- Arătați că (G, \circ) este grup abelian.
- Demonstrați că funcția $f : (0, \infty) \rightarrow G$, $f(x) = x + 8$ este izomorfism de la grupul $((0, \infty), \cdot)$ la grupul (G, \circ) .

Test 14 (Brăila)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 4x + 4y - 4xy - 3$.

- Demonstrați că $x * y = 1 - 4(x - 1)(y - 1)$, pentru orice numere reale x și y .
- Arătați că $x * \frac{1}{x} \geq 1$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.
- Determinați numerele reale x pentru care $x * x * x * x = x$.

Test 15 (Ilfov 1)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$\text{asociativă } x * y = \frac{3}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{xy}{2}$$

- Arătați că $-1 * 0 * 1 = 1$.
- Determinați simetricul elementului 2 în raport cu legea „ $*$ ”.
- Arătați că pentru orice x și y din mulțimea $H = \{4k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, avem că $x * y \in H$.

Test 16 (Ilfov 2)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
 $x * y = -xy + 2x + 2y - 2$

- a) Arătați că $x * y = 2 - (x - 2)(y - 2)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- b) Determinați numerele reale x pentru care $x * x * x = 1$.
- c) Calculați $\sqrt[3]{1} * \sqrt[3]{2} * \sqrt[3]{3} * \dots * \sqrt[3]{2022}$.

Test 17 (Maramures)

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă, definită prin
 $x \circ y = 2xy + 2x + 2y + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Arătați că $x \circ y = 2(x + 1)(y + 1) - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- b) Aflați două elemente $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$.
- c) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $x \circ x \circ x = x$.