1. Examen august 2023

Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 - 8X^2 + 3mX + m$, unde m este număr real.

a) Pentru $m = 2$, arătați că $f(1) = 3$.

b) Pentru $m = 0$, determinați rădăcinile polinomului f.

c) Determinați numărul rațional m pentru care polinomul f are rădăcina $x_1 = 1 + \sqrt{3}$.

2. Examen BACALAUREAT IUNIE 2023

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + (2^x - 2)(2^y - 2)$.

a) Arătați că $2 \circ 3 = 18$.

b) Arătați că $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$".

c) Demonstrați că $x \circ (-x) \leq 1$, pentru orice număr real x.

3. Examen iunie 2023 (sesiune specială)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2y^2 - 4(x+y)^2 + 1$.

a) Arătați că $0 * 1 = -3$.

b) Arătați că $x * (-1) \leq 2x$, pentru orice număr real x.

c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale nenule, cu $m \leq n$, pentru care $m * n = 1$.

4. MODEL 2023

Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + aX^2 + 8X - 8$, unde a este număr real.

a) Arătați că $f(-1) = -15$, pentru orice număr real a.

b) Determinați numărul real a pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - 1$ este egal cu $15X$.

c) Arătați că, pentru orice număr real a, polinomul f **nu** are toate rădăcinile numere întregi.

5. TEST (Braila)

Se notează cu x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile polinomului $f = X^4 - 3X^2 + 2X + 1$.

a) Determinați restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X - 2$.

b) Arătați că polinomul f nu are rădăcini raționale.

c) Arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = -8$.

6. SIMULARE martie 2023

Pe mulțimea $M=[-1,1]$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{xy}{1+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$.

a) Arătați că $1*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

b) Arătați că $x*(-x)\geq -x^2$, pentru orice $x\in M$.

c) Determinați perechile (a,b) de numere din mulțimea M pentru care $a*b=1$.

Test7 (Giurgiu)

Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 * z_2 = z_1+z_2+z_1\cdot z_2$.

a) Arătați că $(2+i)*(2-i)=9$.

b) Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a, numărul A = (-1+ (a+1)i) ∗ (-1+ (a-1)i) este real strict mai mic decât 0.

c) Determinați numerele complexe z penru care $z*z=-5$.

Test 8 (Dolj)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție:
$x*y=3xy-3x-3y+4$. Legea „∗” este asociativă și are element neutru.

a) Arătați că $x*y=3(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

b) Calculați $\frac{1}{1011}*\frac{2}{1011}*\frac{3}{1011}*\ldots*\frac{2023}{1011}$.

c) Determinați numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor față de legea „∗”.

Test 9 (Timiș)

Pe mulțimea $\boldsymbol{R}$ se definește legea de compoziție asociativă „∗”, $x*y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice $x,y\in\boldsymbol{R}$.

a) Demonstrați că $x*y*z=4(x-3)(y-3)(z-3)+3$, pentru orice $x,y,z\in\boldsymbol{R}$.

b) Arătați că $e=\frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „∗”.

c) Determinați numerele reale x astfel încât $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{de\ 2023\ ori\ x}=3$.

Test 10 (Vrancea)

Pe mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{5}xy+3x+3y+30$.

a) Aflați numărul rațional a pentru care $x*a=a, \forall x\in\mathbb{Q}$.

b) Dați exemplu de două numere raționale x și y care nu sunt numere întregi și pentru care $x*y$ este număr întreg.

c) Arătați că funcția $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}, f(x)=5x-15$ are proprietatea $f(x\cdot y)=f(x)*f(y), \forall x,y\in\mathbb{Q}$.

Test 11 (Călărași)

Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3(x+y) - xy - 6$.

a) Arătași că $2023 \circ 3 = 3$.

b) Arătați că există un număr finit de elemente simetrizabile în raport cu legea de compoziție.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{x-de2023ori} = 2$.

Test 12 (Iași)

Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = -5xy + 10x + 10y - 18$.

a) Demonstrați că $x * y = 2 - 5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

b) Arătați că, dacă $a * a = b$ și $b * b = a$, atunci $a = b = 2$ sau $a = b = \frac{9}{5}$.

c) Determinați numerele reale nenule m, știind că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = me^x + 2$ verifică relația $f(x+y) = f(x) * f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

Test 13 (Hunedoara)

Pe $\mathbb{R}$ considerăm legea "$\circ$" definită prin $x \circ y = 5xy - 30x - 30y + 186$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Se știe că această lege este asociativă și comutativă.

a) Demonstrați că $x \circ y = 5(x-6)(y-6) + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$;

b) Determinați un element $a \in \mathbb{R}$ pentru care $x \circ a = a \circ x = a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

c) Dacă $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sunt divizorii întregi ai numărului 2022 calculați $d_1 \circ d_2 \circ \ldots \circ d_n$.

Test 14 (Brăila)

Pe mulțimea $M = (-10, 10)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{100(x+y)}{xy + 100}$.

a) Arătați că $3 * 0 = 3$.

b) Se consideră $f : M \to (0, \infty)$, $f(x) = \frac{10 - x}{10 + x}$. Demonstrați că $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in M$.

c) Determinați $x \in M$ pentru care $\underbrace{x * x * x * \ldots * x}_{de\ 2023\ ori\ x} = 0$.

TEST 15 ICHB

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă „ $*$ " definită prin $x * y = 3xy - 3x - 3y + 4$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Determinați $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x * y = 3(x-1)(y-1) + k$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Determinați că $H = (1; +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „ $*$ ".

c) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $x * x * x * x = 28$.

Test 16 (Dâmbovița)

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă, cu element neutru, $x * y = \frac{1}{3}xy - \frac{1}{2}(x+y) + \frac{9}{4}$.

a) Demonstrați că $x * y = \frac{1}{3}(x - \frac{3}{2})(y - \frac{3}{2}) + \frac{3}{2}$, oricare ar fi numerele reale x și y.

b) Determinați numerele reale x pentru care $x * x * x = x$.

c) Demonstrați că **nu** există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție " $*$ " să fie număr natural.

Test 17 (Ilfov 1)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 2xy + x + y$.

a) Demonstrați că $x * y = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

b) Determinați numărul real x pentru care $x * x * x = 0$.

c) Aflați numărul real pozitiv a, știind că $f(x * y) = f(x) + f(y)$ pentru orice numere reale x și y, unde $f: \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \to \mathbb{R}, f(x) = ln\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{a}\right)$.

Test 18 (Ilfov 2)

Pe mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$ se definește legea de compoziție

$$x * y = \frac{1}{5}xy + 3x + 3y + 30.$$

a) Arătați că $x * (-15) = -15, \forall x \in \mathbb{Q}$.

b) Dați exemplu de două numere raționale x și y care nu sunt numere întregi și pentru care $x * y$ este număr întreg.

c) Arătați că funcția $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, f(x) = 5x - 15$ are proprietatea $f(x \cdot y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$.

Test 19 (Maramureș)

Pe $\mathbf{R}$ se definește legea de compoziție asociativă: $x * y = xy - x - y + 2$.

a) Calculați $\sqrt{2} * 2$;

b) Determinați elementele simetrizabile ale lui $\mathbf{R}$ raport cu legea „$*$";

c) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\underbrace{x * x * x * \cdots * x}_{10 \text{ ori } x} = 1025$.