1. Examen august 2023

Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x+1&2x+1\\x-1&2x-1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(B(2))=4$.

b) Determinați numărul real a pentru care $B(0)\cdot B(1)=aA$.

c) Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=A\cdot(B(0)-3I_2)$.

2. Examen BACALAUREAT IUNIE 2023

Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}3+a&2-2a\\1-a&1+3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=1$.

b) Arătați că $A(0)\cdot(A(a)-A(0))=aI_2$, pentru orice număr real a.

c) Demonstrați că $\det\left(A\left(a^2\right)-aA(a)\right)\geq 0$, pentru orice număr real a.

3. Examen iunie 2023 (sesiune specială)

Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1-a&a\\-3a&3a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(2))=5$.

b) Arătați că $A(a)-I_2=a(A(1)-I_2)$, pentru orice număr real a.

c) Determinați numărul întreg m pentru care $A(m)\cdot A(2m)=A(1)$.

4. MODEL 2023

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a&1&a+1\\1&a&-1\\2&-a&4\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}ax+y+(a+1)z=a\\x+ay-z=4\\2x-ay+4z=-4\end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(1))=-9$.

b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.

c) Arătați că, dacă sistemul are soluția unică (x_0,y_0,z_0), atunci $x_0+y_0+z_0=2$.

5. TEST (Braila)

Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Calculați $\det(A(2))$.

b) Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(-x)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Arătați că $\det(A(1)+A(2)+\ldots+A(n))=\frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$, pentru orice număr natural nenul n.

6. SIMULARE martie 2023

Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix} x+1 & -1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & -1 & x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(A(1))=3$.

b) Determinați numărul real x pentru care $A(0)\cdot A(x)=A(0)$.

c) Determinați numerele reale a și b pentru care $(A(1))^{-1}=aA(1)+bI_3$, unde $(A(1))^{-1}$ este inversa matricei $A(1)$.

Test7 (Giurgiu)

Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X(a)=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(X(-1))=12$.

b) Determinați numerele reale a pentru care $\det(X(a)-I_3)=0$.

c) În reperul cartezian se consideră punctele $A(2,3)$, $B(3,9)$ și $C(a,a^2)$, unde a este număr natural. Determinați numerele naturale a pentru care ABC este triunghi și are aria mai mică decât 3.

Test 8 (Dolj)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X(a)=I_3+aA, a\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $\det X(1)=16$.

b) Arătați că pentru orice numere reale a și b avem $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+3ab)$.

c) Determinați numerele naturale m și n pentru care $X(m)\cdot X(n)=X(9)$.

Test 9 (Timiș)

Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=1$.

b) Arătați că $A(x)+A(y)=2A\left(\frac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați numărul real x pentru care $A(x^2+1)\cdot A(x)=A(x^2+x+1)$.

Test 10 (Vrancea)

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$

a) Arătați că $\det A(-1)=17$.
b) Demonstrați că $A(2023-a)+A(2023+a)=2A(2023)$.
c) Determinați perechile de numere reale x și y pentru care $A(x)A(y)=2A(-8)$.

Test 11 (Călărași)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(a)=I_3+aA$ pentru orice număr real a.

a)Arătați că $\det A=0$.
b)Arătați că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b+2ab)$ pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$.
c)Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $M(a)$ este inversabilă și calculați $M^{-1}(-1)$.

Test 12 (Iași)

În mulțimea $M_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele: $A(a)=\begin{pmatrix} a & -a & -a \\ -a & a & -a \\ -a & -a & a \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Arătați că $\det(A(-1))+\det(A(1))=0$.

b) Aflați $a\in\mathbb{R}$ știind că $(A(a))^2-A(a)-2I_3=O_3$.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\det(A(-1)+xI_3)=0$.

Test 13 (Hunedoara)

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}$.

a) Rezolvați ecuația $\det(A-xI_2)=0$.

b) Demonstrați că, dacă matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există numerele $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât X este de forma $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$.

c) Arătați că ecuația $X^2=A$ are patru soluții în $M_2(\mathbb{R})$.

Test 14 (Brăila)

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & a\\ 4 & 9 & a^2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\ 2x+3y+az=1\\ 4x+9y+a^2z=a-3\end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det\left(A(1)\right)=2$.

b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

c) Pentru $a=4$, rezolvați sistemul de ecuații.

Test 15 (Ilfov 1)

Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & x\\ 9 & 16 & x^2\end{pmatrix}$, **unde x este număr real.**

a) Arătați că $\det\left(A(2)-A(1)\right)=0$

b) Arătați că $\det\left(A(x)\right)=(x-3)(x-4)$

c) Determinați numărul real m pentru care $\det\left(A(m)\right)\leq\det\left(A(x)\right)$, **pentru orice x real.**

Test 16 (Ilfov 2)

Se consideră mulțimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ 2x+2x^2 & 4x & 1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$

a) Arătați că $\det(A(1))=1$

b) Demonstrați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, **oricare ar fi** $x,y\in\mathbb{R}$

c) Să se rezolve ecuația $A(2)\cdot X=A(3)$, **unde** $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Test 17 (Maramureș)

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că, dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $X \cdot A = A \cdot X$, atunci există $u, v \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & u \end{pmatrix}$.

b) Calculați $A^n, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ecuația $X^4 = A$.