1. **Examen august 2023**

Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & x & x \\ 1 & x & 1 \\ -1 & -x & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(A(1))=0$.

b) Arătați că $A(x)\cdot A(y)-A(xy)=(x+y-2)A(0)$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați numerele reale x și y pentru care $A(-1)\cdot A(3)\cdot A(x)=A(y)$.

2. **Examen BACALAUREAT IUNIE 2023**

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+y+2z=2 \\ x-y+az=4 \\ ax+(a+1)y-2z=a \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=8$.

b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

c) Pentru $a=-2$, arătați că $x_0z_0+y_0=-2$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații.

3. **Examen iunie 2023 (sesiune specială)**

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & -1 & 2a \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax-y+2az=0 \\ x-2y+az=0 \\ x+y+(1-a)z=0 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=1$.

b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

c) Pentru $a=-1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

4. **MODEL 2023**

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 3 & a & -2 \\ 2a+1 & 1-a & -1 \\ a+2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x+ay-2z=b \\ (2a+1)x+(1-a)y-z=c \\ (a+2)x-2y+z=-1 \end{cases}$, unde a, b și c sunt numere reale.

a) Arătați că $\det(A(0))=5$.

b) Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

c) Determinați numerele reale b și c pentru care sistemul de ecuații este compatibil, oricare ar fi numărul real a.

5. TEST (Braila)

Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $\left(A(x)-A(y)\right)^{2023}=O_3$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

c) Determinați inversa matricei $A(x)$, unde $x\in\mathbb{R}$.

6. SIMULARE martie 2023

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & 1 & 2\\ 1 & a & -1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}ax+y+2z=-2\\ x+ay-z=4\\ 2x+2y+z=2\end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=1$.

b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

c) Pentru $a=1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi și $x_0>y_0>z_0$.

Test7 (Giurgiu)

Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ m & m^2 & 1\\ m+1 & (m+1)^2 & 1\end{pmatrix}$ unde m este număr real.

a) Arătați că det(A(0)) = 0 .

b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care matricea A(m) este inversabilă.

c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele necoliniare A(1,1), B(m, m^2) și C($m+1, (m+1)^2$), unde m este un număr real. Determinați numerele reale m, știind că triunghiul ABC are aria egală cu 1.

Test 8 (Dolj)

Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^x\end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

a) Determinați $\det(A(10))$.

b) Determinați valorile reale ale lui x, știind că $A(x)\cdot A(2x)=A(x^2+2)$.

c) Știind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot \ldots \cdot A(2022)$, demonstrați că n este număr natural divizibil cu 2023.

Test 9 (Timiș)

Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 1\\ m & 1 & -2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y-3z=3\\ 2x-y+z=m\\ mx+y-2z=2m\end{cases}$, unde m este număr real.

a) Arătați că $\det(A(2))=1$.

b) Pentru $m=2$, rezolvați sistemul de ecuații.

c) Pentru $m=3$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului de ecuații, astfel încât $x_0+y_0z_0=4$ și x_0,y_0,z_0 sunt numere întregi.

Test 10 (Vrancea)

Se consideră matricele $A(m)=\begin{pmatrix}m & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}, m\in\mathbb{R}$ și $B=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$.

a) Rezolvați ecuația $det(A(m))=0, m\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $A^{-1}(-1)=\frac{1}{2}A(0)$.

c) Determinați $X\in M_{3,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $A(-1)\cdot X=B$.

Test 11 (Călărași)

Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ bc & ac & ab\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}ax+by+cz=a\\ a^2x+b^2y+c^2z=a^2\\ bcx+acy+abz=bc\end{cases}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $\det(A(6,-2,3))=0$.

b) Arătați că sistemul este compatibil determinat $\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$ și $a\neq b\neq c\neq a$.

c) Pentru $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$, $a\neq b=c$ arătați că sistemul admite o infinitate de soluții (x_0,y_0,z_0) pentru care $x_0+y_0+z_0\in\mathbb{N}$.

Test 12 (Iași)

Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ m & m^2 & 1\\ m+1 & (m+1)^2 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, unde m este un număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=0$.

b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care $\det(A(m))\neq 0$.

c) În reperul cartezian (xOy) considerăm punctele necoliniare $A(1,1)$, $B(m,m^2)$, $C(m+1,(m+1)^2)$, unde $m\in\mathbb{R}$. Determinați valorile lui m, știind că aria triunghiului ABC este egală cu 1.

Test 13 (Hunedoara)

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $rang\ A$.

b) Să se arate că $A^n=14^{n-1}A,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

c) Să se arate că inversa matricei I_3-A este $I_3-\frac{1}{13}A$.

Test 14 (Brăila)

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ a & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr întreg.

a) Arătați că $\det(A(1))=7$.

b) Demonstrați că rangul matricei $A(a)$ este egal cu 3, pentru orice număr întreg a.

c) Determinați numărul întreg m pentru care inversa matricei $A(m)$ are toate elementele numere întregi.

TEST 15 ICHB

Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ m & m^2 & 1\\ m+1 & (m+1)^2 & 1\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

a) Calculați $det(A(0))$

b) Determinați $m\in R$ astfel încât matricea A(m) să fie inversabilă.

c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1;1), B(m;m^2), C(m+1,(m+1)^2)$. Aflați $m \in R$ astfel încât $A_{\Delta ABC} = 1$

Test 16 (Dâmbovița)

Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 2a-5 & a-2 \\ 1 & 2-a & a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este un număr real.

a) Arătați că $\det(A(0)) = 3$

b) Demonstrați că $\det(A(a)) = (a-1)(a-3)(3a+1)$, pentru orice număr real a

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(3^x)) = 0$.

Test 17 (Ilfov 1)

Fie matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ si sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+z=3 \\ (a+2)x+y-z=0, a \in \mathbb{R}. \\ x+y-az=-1 \end{cases}$

a) Arătați că $\det A(0) = 1$.

b) Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a)) = 0$.

c) Determinați numărul real a, știind că sistemul are soluție unică $(x_0; y_0; z_0)$ și $4\frac{x_0}{z_0} + y_0 = 0.$

Test 18 (Ilfov 2)

Se consideră matricele $A(m) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R}$ și $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că matricea $A(m)$ este inversabilă pentru orice $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

b) Arătați că $A^{-1}(-1) = \frac{1}{2} A(0)$, unde $A^{-1}(-1)$ este inversa matricei $A(-1)$.

c) Determinați $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $A(-1) \cdot X = B$.

Test 19 (Maramureş)

1. Considerăm sistemul de ecuații: $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ ax+y-2z=1 \\ -x+3y+z=b \end{cases}$, $a,b\in\mathbf{R}$ şi matricea sa, $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\det(A)=5a+4$;

b) Determinați numerele reale a,b pentru care tripletul $(1,0,-1)$ este soluție a sistemului;

c) Determinați numerele reale a,b astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat.