

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E.c)

Matematică $M_mate-info$

Barem de evaluare și de notare

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
 Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

SUBIECTUL I

(30 puncte)

5p	<p>1. $b_2 = b_1q, b_3 = b_1q^2, b_5 = b_1q^4, b_6 = b_1q^5,$ $b_1q(1+q^3)=156, b_1q^2(1+q^3)=468$ $q=3$</p>	<p>1p 2p 2p</p>
5p	<p>2. $G_f \cap Ox = \emptyset \Leftrightarrow \Delta < 0$ $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow m \in (-2, 2) \cap \mathbf{Z} \Leftrightarrow m \in \{-1, 0, 1\}$</p>	<p>2p 3p</p>
5p	<p>3. $\frac{4^x}{4} - 2 \cdot 2^x + 3 = 0$ $2^x = t, t > 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0$ $t_1 = 2 \Rightarrow x = 1$ $t_2 = 6 \Rightarrow x = \log_2 6$</p>	<p>1p 2p 1p 1p</p>
5p	<p>4. Numărul submulțimilor nevide cu un număr par de elemente este: $C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots = 2^{n-1} - C_n^0 = 2^{n-1} - 1$ $2^{n-1} - 1 = 511 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 512 \Rightarrow n - 1 = 9 \Rightarrow n = 10$</p>	<p>3p 2p</p>
5p	<p>5. $\overline{BT} = \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{BM})$. Cum $\overline{BC} = 2\overline{BM} \Rightarrow \overline{BT} = \frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{4}\overline{BC}$ $\overline{BT} = \frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{4}(\overline{BA} + \overline{AC}) \Rightarrow \overline{BT} = \frac{1}{4}\overline{AC} - \frac{3}{4}\overline{AB}$</p>	<p>3p 2p</p>
5p	<p>6. $\sin A + \cos A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} A = -1$ $A \in (0, \pi) \Rightarrow A = \frac{3\pi}{4}$</p>	<p>2p 3p</p>

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

5p	<p>1. a) $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & i & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & i & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$ $= -i + 0 + 0 - (-2i) - 0 - 0 = i$</p>	<p>2p 3p</p>
5p	<p>b) $\det A(a) = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ a & i & a \\ -1 & a & -1 \end{vmatrix} = a^2 + i$, pentru orice număr real a Cum, pentru orice număr real a, $a^2 + i \neq 0$, obținem că $\det A(a) \neq 0$, deci, pentru orice număr real a, matricea $A(a)$ este inversabilă</p>	<p>2p 3p</p>

5p	<p>c) $A(0) \cdot A(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3$</p> <p>$\underbrace{A(0) \cdot A(0) \cdot A(0) \cdot \dots \cdot A(0)}_{\text{de 2022 ori}} = \underbrace{(-I_3) \cdot (-I_3) \cdot (-I_3) \cdot \dots \cdot (-I_3)}_{\text{de 1011 ori}} = -I_3$</p>	2p 3p
5p	<p>2. a) $x \circ y = xy - 6x - 6y + 36 + 6 =$ $= x(y-6) - 6(y-6) + 6 = (x-6)(y-6) + 6$, pentru orice numere reale x și y</p>	2p 3p
5p	<p>b) Elementul neutru al legii de compoziție „\circ” este 7</p> <p>$x' \in \mathbf{Z}$ este simetricul lui $x \in \mathbf{Z}$ dacă $x \circ x' = x' \circ x = 7$, de unde $x' = 6 + \frac{1}{x-6}$; $x \neq 6$</p> <p>Cum $x' \in \mathbf{Z}$, obținem $x = 5$ sau $x = 7$, de unde rezultă că $(x, x') \in \{(5, 5), (7, 7)\}$</p> <p>$x = 6$ nu este simetrizabil în raport cu legea dată</p>	1p 2p 2p
5p	<p>c) $x \circ 6 = 6$ și $6 \circ y = 6$, pentru orice numere reale x și y</p> <p>Deoarece legea „\circ” este asociativă, avem</p> $\frac{2022}{1} \circ \frac{2022}{2} \circ \frac{2022}{3} \circ \dots \circ \frac{2022}{2022} =$ $\underbrace{\frac{2022}{1} \circ \frac{2022}{2} \circ \dots \circ \frac{2022}{336}}_x \circ \frac{2022}{337} \circ \underbrace{\frac{2022}{338} \circ \frac{2022}{339} \circ \dots \circ \frac{2022}{2022}}_y = x \circ 6 \circ y = (x \circ 6) \circ y = 6 \circ y$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

5p	<p>1.a) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \cdot x - \ln(x+1)}{x^2}$</p> <p>$\Rightarrow x^2 \cdot f'(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$</p>	3p 2p
5p	<p>b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow$ funcția nu admite asimptotă verticală.</p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$</p> <p>$\Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală la $+\infty$. Graficul funcției admite o singură asimptotă</p>	2p 2p 1p
5p	<p>c) $f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{x+1} - \ln(x+1) \right)$ Cum $\frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in (0, +\infty)$, semnul derivatei este dat de semnul funcției $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$, $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$. $g'(x) = -\frac{x}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in (0, +\infty)$</p> <p>$\Rightarrow g$ este strict descrescătoare pe $(0, +\infty) \Rightarrow g(x) < \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in (0, +\infty)$</p> <p>$\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$.</p> <p>Cum $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1 \Rightarrow f(x) \in (0, 1) \Rightarrow a = 1$</p>	2p 1p 2p
5p	<p>2. a) F derivabilă pe \mathbb{R} și $F'(x) = f(x), (\forall) x \in \mathbb{R}$</p> <p>$e^x \cdot [ax^2 + (2a+b)x + (b+c)] = e^x \cdot (2x^2 + 3x + 4), (\forall) x \in \mathbb{R}$</p>	1p 2p

	Rezultă: $\begin{cases} a=2 \\ 2a+b=3 \\ b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \in \mathbb{R} \\ b=-1 \in \mathbb{R} \\ c=5 \in \mathbb{R} \end{cases} .$	2p
5p	<p>b) Din a) $F(x) = e^x \cdot (2x^2 - x + 5) + c$, $c \in \mathbb{R}$ este o primitivă oarecare a lui f</p> <p>$A(0,2) \in G_f \Rightarrow F(0) = 2 \Rightarrow 5 + c = 2 \Rightarrow c = -3 \in \mathbb{R}$</p> <p>$F(x) = e^x \cdot (2x^2 - x + 5) - 3$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
5p	<p>c) Fie $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă oarecare a lui f. F convexă pe $\mathbb{R} \Leftrightarrow F''(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$</p> <p>$F''(x) = (F'(x))' = f'(x) = e^x \cdot (2x^2 + 3x + 4) + e^x(4x + 3) = e^x \cdot (2x^2 + 7x + 7)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$</p> <p>Deoarece $e^x > 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$ și $2x^2 + 7x + 7 > 0$ $(\forall) x \in \mathbb{R}$ pentru că $\Delta < 0$ rezultă $F''(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$. În consecință, F convexă pe \mathbb{R}.</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>

Coordonator grup de lucru – M_mate-info:

- Bălănescu Daniela, inspector școlar pentru matematică

Grup de lucru – Varianta 3 – M_mate-info:

- Dermengiu Alina, Colegiul Național *Mircea cel Bătrân* Constanța

- Gache Florian, Colegiul Național *Mircea cel Bătrân* Constanța

Bibliografie – Matematică – M_mate-info

1. M. Andronache, D. Șerbănescu, M. Perianu, C. Ciupală, F. Dumitrel – *Matematică pentru examenul de bacalaureat – matematică-informatică*, Ed. Art Educațional, București, 2017.

2. M. Ganga – *Elemente de analiză matematică pentru clasa a XII-a*, Ed. Mathpress, Ploiești, 2000.

3. T. Cohal, Gh. Iurea - *Probleme de matematică pentru clasa a XI-a* , Ed. Paralela 45, 2012

4. A. Zanoschi, Gh. Iurea, G.Popa, P. Răducanu, I. Șerdean - *Bacalaureat 2016– matematică, M_mate-info*, Ed. Paralela 45, 2015