

**Bacalaureat, mai 2022  
Proba E. c)**

**Matematică *M\_șt-nat*  
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

*Simulare*

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total obținut pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**
**(30 de puncte)**

1.	$\left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i}\right)^2 = \left(\frac{1+i}{(1-i)(1+i)} - \frac{1-i}{(1-i)(1+i)}\right)^2 = \left(\frac{1+i}{2} - \frac{1-i}{2}\right)^2 = \left(\frac{2i}{2}\right)^2 = i^2 = -1$	3p 2p
2.	$f(x) - 1 = -\frac{2x}{x^2+1} - 1 = -\frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = -\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ <p>Cum <math>\frac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0</math> pentru orice număr real <math>x</math>, obținem <math>f(x) \leq 1</math>, pentru orice număr real <math>x</math>.</p>	3p 2p
3.	$3^{2x+1} - 10 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} - 30 \cdot 3^x + 27 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 = 0$ , unde $3^x = t$ $\Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 9$ $3^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0$ și $3^x = 9 \Rightarrow x_2 = 2$ soluții.	2p 1p 2p
4.	$f(0) = f(1)$ pot fi alese în patru moduri și pentru fiecare alegere, numerele $f(2)$ și $f(3)$ pot fi alese în $4^2$ moduri. Există $4 \cdot 4^2 = 64$ de funcții.	3p 2p
5.	$m_d = m_{AB}$ și cum $m_{AB} = -\frac{2}{3}$ obținem $m_d = -\frac{2}{3}$ $y - y_c = m_d(x - x_c) \Leftrightarrow y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 1) \Leftrightarrow$ Ecuația dreptei $d$ este $2x + 3y - 11 = 0$ .	2p 3p
6.	$2 \sin x \cos x = \sin x \Leftrightarrow \sin x(2 \cos x - 1) = 0$ Cum $x \in [0, \pi]$ , obținem $x = 0$ , $x = \frac{\pi}{3}$ sau $x = \pi$ .	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**
**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$\det(M(1)) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 =$	<b>3p</b>
<b>a)</b>	$= 8 - 3 = 5.$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$M(a) \cdot M(b) = (I_2 + aA) \cdot (I_2 + bA) = I_2 + aA + bA + abA^2$ și cum $A^2 = 4A \Rightarrow$ $\Rightarrow M(a) \cdot M(b) = I_2 + (a + b + 4ab)A = M(a + b + 4ab)$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$ .	<b>2p</b> <b>1p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$M(a) \cdot M(a) = M(2a + 4a^2) = M(2) \Rightarrow 4a^2 + 2a = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2a^2 + a - 1 = 0 \Rightarrow a_1 = -1$ și $a_2 = \frac{1}{2}.$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.</b>	$x \circ y = 3\left(xy - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}\right) = 3\left[x\left(y - \frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(y - \frac{2}{3}\right) - \frac{4}{9} + \frac{2}{3}\right] =$	<b>2p</b>
<b>a)</b>	$= 3\left[x\left(y - \frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(y - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{9}\right] = 3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(y - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{9}\right] = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(y - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ .	<b>3p</b>
<b>b)</b>	$x \circ x = 3xx - 2x - 2x + 2 = 3x^2 - 4x + 2$ $3x^2 - 4x + 2 \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (3x - 2)^2 \geq 0$ , pentru orice număr real $x$ .	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$x \circ e = e \circ x = x$ , pentru orice $x \Rightarrow e = 1$ $x \circ x \circ x \Leftrightarrow 9\left(x - \frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow x = 1.$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**
**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$	<b>2p</b>
<b>a)</b>	$f'(x) = e^{x'} - \ln x' + x' = e^x - \frac{1}{x} + 1, f'(1) = e \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = e.$	<b>3p</b>
<b>b)</b>	Tangenta la graficul funcției în punctul $(1, f(1))$ are ecuația $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow$ $f(1) = e + 1, f'(1) = e \Rightarrow y - e - 1 = e(x - 1) \Rightarrow$ ecuația tangentei este $ex - y + 1 = 0.$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}, x \in (0, \infty)$ $f''(x) > 0$ , pentru orice $x \in (0, \infty)$ , deci funcția $f$ este convexă.	<b>2p</b> <b>3p</b>

<b>2.</b> <b>a)</b>	$\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^1 \frac{x(x+2)e^x}{e^x} dx = \int_0^1 (x^2 + 2x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 2x dx =$ $= \frac{x^3}{3} \Big _0^1 + x^2 \Big _0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 2x)e^{x'} dx = (x^2 + 2x)e^x \Big _0^1 - \int_0^1 (2x + 2)e^x dx =$ $= 3e - \left( (2x + 2)e^x \Big _0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx \right) = 3e - (4e - 2 - 2e + 2) = e.$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$\int_1^n \frac{(x+1)e^x}{f(x)} dx = \int_1^n \frac{x+1}{x^2+2x} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x) \Big _1^n = \frac{1}{2} \ln \frac{n^2+2n}{3}$ $\frac{1}{2} \ln \frac{n^2+2n}{3} = \frac{3 \ln 2}{2} \Rightarrow n^2 + 2n - 24 = 0, \text{ obținem } n = 4 \text{ deoarece este număr natural nenul.}$	<b>3p</b> <b>2p</b>