Bacalaureat, mai 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii ***Simulare***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$ este real.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{2x}{x^2+1}$. Arătați că $f(x)\le 1$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+1}-10\cdot 3^{x+1}+27=0$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{0,1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ cu proprietatea $f(0)=f(1)$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul C și este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Determinați numerele reale $x\in[0,\pi]$, pentru care $\sin 2x=\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră mulțimea $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}$ și $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=5$.

5p **b)** Arătați că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b+4ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $M(a)\cdot M(a)=M(2)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă și cu element neutru $x\circ y=3xy-2x-2y+2$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=3\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(y-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $x\circ x\ge\frac{2}{3}$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $x\circ x\circ x=e$, unde e este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\ln x+x$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=e$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x(x+2)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că $\int_1^n \frac{(x+1)\cdot e^x}{f(x)}dx=\frac{3\ln 2}{2}$.