

**Bacalaureat, mai 2022
Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

1.	$a_2 + a_9 = a_1 + a_{10} = 10$ $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(a_2 + a_9) \cdot 10}{2} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50.$	2p 3p
2.	$z = i(1-i) = i - i^2 = 1+i$ $ z = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$	2p 3p
3.	$2^{x+1} + 2^{2-x} = 9 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x + \frac{4}{2^x} = 9, 2^x = t$ $2t + \frac{4}{t} = 9 \Leftrightarrow 2t^2 - 9t + 4 = 0 \Rightarrow t_1 = 4, t_2 = \frac{1}{2}$ $2^x = 4 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ soluție}$ $2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = -1 \text{ soluție.}$	1p 2p 2p
4.	nr. cazuri posibile=90 nr. cazuri favorabile=45 $P = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}.$	2p 2p 1p
5.	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ $ \overrightarrow{AC} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} =$ $= 10.$	2p 2p 1p
6.	$\frac{\sin a - \cos a}{\cos a + \sin a} = \frac{\cos a(\operatorname{tg} a - 1)}{\cos a(1 + \operatorname{tg} a)} = \frac{\operatorname{tg} a - 1}{\operatorname{tg} a + 1} =$ $= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea		(30 puncte)
1. a)	$A(3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(3)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 1 - 1 - 4 - 1 + 3 = 15 - 5 = 10.$	3p 2p
b)	$A(n) = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 \\ 1 & n+1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \det A(n) = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ 1 & n+1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = n^2 + n + 1 - 1 - n - 1 - 1 + n = n^2 + n - 2$ $n \geq 2 \Rightarrow n^2 + n - 2 \geq 2^2 + 2 - 2 = 4 \Rightarrow \det A(n) \geq 4$ <p>Deci, $\text{rang } A(n) = 3$ pentru orice număr natural $n \geq 2$.</p>	2p 2p 1p
c)	$A(m) \text{ inversabilă} \Rightarrow A(m) \cdot A^{-1}(m) = I_3, \text{ oricare } m \geq 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \det A(m) \cdot \det A^{-1}(m) = \det I_3 \Rightarrow \det A^{-1}(m) = \frac{1}{m^2 + m - 2}$ <p>Dacă $A^{-1}(m)$ ar avea toate elementele numere întregi \Rightarrow</p> $\Rightarrow \det A^{-1}(m) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{m^2 + m - 2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\Rightarrow m^2 + m - 2 \in \{1, -1\}$ <p>Cum $m \geq 2 \Rightarrow m^2 + m - 2 \geq 4$, deci $A^{-1}(m)$ nu are toate elementele numere întregi.</p>	3p 2p
2. a)	$x \circ y = -2xy + 10x + 10y - 50 + 5 = -2x(y-5) + 10(y-5) + 5 = -2(x-5)(y-5) + 5$ <p>pentru orice numere reale x și y.</p>	3p 2p
b)	$x \circ 5 = 5, 5 \circ y = 5$ pentru orice numere reale x și y . $1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ 2022 = (1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 \circ 5) \circ \dots \circ 2022 = 5 \circ (6 \circ 7 \circ \dots \circ 2022) = 5$	2p 3p
c)	$m \circ n = -2(m-5)(n-5) + 5 = 27 \Rightarrow (m-5)(n-5) = -11$ <p>Cum m și n sunt numere naturale, se obțin perechile $(16, 4)$ și $(4, 16)$.</p>	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea		(30 puncte)
1. a)	$\begin{aligned}f'(x) &= (4x)' - \ln(x^2 + 1)' = 4 - \frac{1}{x^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)' = 4 - \frac{2x}{x^2 + 1} = \\&= \frac{4x^2 - 2x + 4}{x^2 + 1} = \frac{2(2x^2 - x + 2)}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$	3p 2p

<p>b)</p> $\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (4x - \ln(x^2 + 1)) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln e^{4x} - \ln(x^2 + 1)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{e^{4x}}{x^2 + 1} = \\ &= \ln(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{4x}}{x^2 + 1}) = \ln \infty = \infty. \end{aligned}$	3p
<p>c)</p> $\begin{aligned} f'(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{deci } f \text{ este strict crescătoare} \Rightarrow \\ \Rightarrow f \text{ este injectivă} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad f \text{ continuă} \Rightarrow \text{Im } f = \mathbb{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow f \text{ surjectivă} \\ f \text{ injectivă și surjectivă} \Rightarrow f \text{ bijectivă.} \end{aligned}$	2p
<p>2. a)</p> $\begin{aligned} \int_1^2 (x^2 + 3) \cdot f(x) dx &= \int_1^2 (x^2 + 3 - 2x - 2) dx = \frac{x^3}{3} \Big _1^2 - x^2 \Big _1^2 + x \Big _1^2 = \\ &= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 4 + 1 + 2 - 1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$	3p
<p>b)</p> $\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{2x}{x^2 + 3} - \frac{2}{x^2 + 3}\right) dx = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 3} dx - 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3} dx = \\ &= x \Big _0^1 - \ln(x^2 + 3) \Big _0^1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} \Big _0^1 = \\ &= 1 - 0 - \ln 4 + \ln 3 - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} 0 = \\ &= 1 - \ln \frac{4}{3} - \frac{\pi \sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$	3p
<p>c)</p> $\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3} \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3} \leq \frac{1}{3}, \text{ pentru orice } x \in [0, 1] \\ \text{deci } 0 \leq f^n(x) &\leq \left(\frac{1}{3}\right)^n, \text{ pentru orice } x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N} \text{ nenul} \\ 0 \leq I_n &= \int_0^1 f^n(x) dx \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{3}\right)^n dx = \left(\frac{1}{3}\right)^n, \text{ pentru orice număr natural nenul } n \\ \text{și cum } \lim_{n \rightarrow \infty} &\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0. \end{aligned}$	2p
	3p