Bacalaureat, mai 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Filiera teoretică, profilul real, matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați suma primilor zece termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2+a_9=10$.

5p **2.** Determinați modulul numărului complex $z=i(1-i)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+1}+2^{2-x}=9$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie impar.

5p **5.** Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}-3\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}-5\vec{j}$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Ştiind că $tga=\sqrt{3}$ și $a\in\mathbb{R}$, arătați că $\dfrac{\sin a-\cos a}{\cos a+\sin a}=2-\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a+1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(3)\right)=10$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr natural $n, n\geq 2$ rangul matricei $A(n)$ este egal cu 3.

5p **c)** Arătați că inversa matricei $A(m)$ **nu** are toate elementele numere întregi, pentru orice număr natural m, $m\geq 2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=-2xy+10x+10y-45$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=-2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculați $1\circ 2\circ 3\circ \ldots \circ 2022$.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale (m,n) pentru care $m\circ n=27$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x-\ln(x^2+1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2(2x^2-x+2)}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1-\dfrac{2x}{x^2+3}-\dfrac{2}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 (x^2+3)\cdot f(x)dx=\dfrac{1}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=1-\ln\dfrac{4}{3}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)dx$. Arătați că $\lim_{n\to\infty} I_n=0$.