

**Examenul național de bacalaureat 2023**

**Proba E. c)**

**Matematică M\_mate-info**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Model**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fractiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$a - b + (a + b)i = 4$ , de unde obținem $a - b = 4$ și $a + b = 0$ $a = 2$ și $b = -2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$m(m-x)^2 - 2(m-x) + m = m(m+x)^2 - 2(m+x) + m \Rightarrow x(m^2 - 1) = 0$ și, cum egalitatea are loc pentru orice număr real $x$ , obținem $m^2 - 1 = 0$ $m = -1$ sau $m = 1$ , care convin	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>3.</b>	$\log_2(2x^2) = \log_2(x^2 + x + 2)$ , de unde obținem $x^2 - x - 2 = 0$ $x = -1$ , care nu convine; $x = 2$ , care convine	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	Mulțimea $F$ are $4^4 = 256$ de elemente, deci sunt 256 de cazuri posibile Pentru fiecare $n \in A$ , $f(n)$ se poate alege în $n$ moduri, deci sunt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ de cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{24}{256} = \frac{3}{32}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5.</b>	$\overline{CM} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})$ , unde $M$ este mijlocul segmentului $AB$ , de unde obținem $\overline{CM} = \overline{OC}$ , deci punctul $C$ este mijlocul segmentului $OM$ Cum $x_M = 2$ și $y_M = 4$ , obținem $x_C = 1$ și $y_C = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>6.</b>	$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin C} = \frac{8}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 8$ , unde $R$ este raza cercului circumscris triunghiului $ABC$ Triunghiul $OAB$ este echilateral cu latura egală cu 8, deci distanța de la punctul $O$ la latura $AB$ este $OM = 4\sqrt{3}$ , unde $M$ este mijlocul segmentului $AB$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$A(0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 3 + 4 + 0 + 4 - 6 - 0 = 5$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 3 & a & -2 \\ 2a+1 & 1-a & -1 \\ a+2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5(1+a)(1-a)$ , pentru orice număr real $a$ $\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = -1$ sau $a = 1$ , deci matricea $A(a)$ este inversabilă dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	<b>2p</b> <b>3p</b>

<p>c) Pentru <math>a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}</math>, sistemul de ecuații este compatibil, oricare ar fi numerele reale <math>b</math> și <math>c</math> ; pentru <math>a \in \{-1, 1\}</math> , <math>\begin{vmatrix} a &amp; -2 \\ 1-a &amp; -1 \end{vmatrix} \neq 0</math> , deci sistemul este compatibil dacă și numai dacă <math>\begin{vmatrix} -1 &amp; -2 &amp; b \\ 2 &amp; -1 &amp; c \\ -2 &amp; 1 &amp; -1 \end{vmatrix} = 0</math> și <math>\begin{vmatrix} 1 &amp; -2 &amp; b \\ 0 &amp; -1 &amp; c \\ -2 &amp; 1 &amp; -1 \end{vmatrix} = 0</math>  <math>b = 2</math> și <math>c = 1</math></p> <p>2.a) <math>f(-1) = (-1)^4 + a \cdot (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) - 8 =</math>  <math>= 1 - a + a - 8 - 8 = -15</math>, pentru orice număr real <math>a</math></p> <p>b) Restul împărțirii polinomului <math>f</math> la polinomul <math>g</math> este egal cu <math>(a+8)X + a - 7</math>, pentru orice număr real <math>a</math>  <math>(a+8)X + a - 7 = 15X</math>, de unde obținem <math>a = 7</math></p> <p>c) Presupunând că rădăcinile <math>x_1, x_2, x_3, x_4</math> ale polinomului <math>f</math> sunt numere întregi, cum <math>x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a</math>, obținem că <math>a \in \mathbb{Z}</math>  <math>x_1 x_2 x_3 x_4 = -8 \Rightarrow  x_1  \cdot  x_2  \cdot  x_3  \cdot  x_4  = 8</math>, de unde obținem că cel puțin o rădăcină a polinomului <math>f</math> are modulul egal cu 1 și, cum <math>f(-1) \neq 0</math> pentru orice număr real <math>a</math>, obținem <math>f(1) = 0</math>, deci <math>a = -\frac{1}{2}</math>, ceea ce este fals, deci polinomul <math>f</math> nu are toate rădăcinile numere întregi</p>	<p>3p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>2p</p> <p>3p</p>
--	---

### SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

<p>1.a) <math>f'(x) = -1 - 4x^3 \operatorname{arctg} x - (x^4 - 1) \cdot \frac{1}{x^2 + 1} =</math>  <math>= -1 - 4x^3 \operatorname{arctg} x - x^2 + 1 = -x^2(4x \operatorname{arctg} x + 1)</math>, <math>x \in \mathbb{R}</math></p> <p>b) Tangenta la graficul funcției <math>f</math> în punctul <math>A(x_0, f(x_0))</math> este paralelă cu axa <math>Ox \Leftrightarrow f'(x_0) = 0</math>  <math>-x_0^2(4x_0 \operatorname{arctg} x_0 + 1) = 0</math> și, cum <math>x_0 \operatorname{arctg} x_0 \geq 0</math> pentru orice <math>x_0 \in \mathbb{R}</math>, obținem <math>x_0 = 0</math>, deci ecuația tangentei la graficul funcției <math>f</math> care este paralelă cu axa <math>Ox</math> este <math>y - f(0) = f'(0)(x - 0)</math>, adică <math>y = 1</math></p> <p>c) <math>f'(x) \leq 0</math>, pentru orice <math>x \in \mathbb{R}</math>, deci funcția <math>f</math> este descrescătoare pe <math>\mathbb{R}</math> și, cum <math>f(0) = 1</math> și <math>f(1) = 0</math>, obținem <math>0 \leq f(x) \leq 1</math>, pentru orice <math>x \in [0, 1]</math>          Pentru <math>g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}</math>, <math>g(x) = \operatorname{tg} x - x</math>, <math>g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \geq 0</math>, pentru orice <math>x \in [0, 1]</math>, deci <math>g</math> este crescătoare, de unde obținem <math>\operatorname{tg} x \geq x</math>, pentru orice <math>x \in [0, 1]</math>, deci <math>\operatorname{tg}(f(x)) \geq f(x) \geq f(\operatorname{tg} x)</math>, pentru orice <math>x \in [0, 1]</math></p>	<p>3p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>2p</p> <p>3p</p>
<p>2.a) <math>\int_0^3 (1 + e^{-x}) f(x) dx = \int_0^3 (x^2 + e^x) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + e^x \right]_0^3 =</math>  <math>= \frac{27}{3} + e^3 - 0 - 1 = 8 + e^3</math></p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
<p>b) <math>\int_{-m}^m \frac{f(x)}{x^2 + e^x} dx = \int_{-m}^m \frac{1}{1 + e^{-x}} dx = \int_{-m}^m \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx =</math>  <math>= \ln(1 + e^x) \Big _{-m}^m = \ln(1 + e^m) - \ln\left(\frac{1 + e^{-m}}{e^m}\right) = \ln e^m = m</math>, pentru orice <math>m \in (0, +\infty)</math></p>	<p>3p</p> <p>2p</p>

c) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^{ax} - 1} \int_0^x f(t) dt \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \int_0^x f(t) dt \right)'}{\left( e^{ax} - 1 \right)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{ae^{ax}} = \frac{1}{2a}, \text{ de unde obținem } \frac{1}{2a} = 1, \text{ deci } a = \frac{1}{2}, \text{ care convine}$$