

**Examenul național de bacalaureat 2023**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Simulare

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii**

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$a_1 = -1, a_3 = 7 \Rightarrow r = 4$ $a_5 = 15$	3p 2p
2.	$A(-1, a) \in G_f \Leftrightarrow f(-1) = a$ $a = -2$	3p 2p
3.	$5^{x^2-5x} = 5^{-4} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$ $x_1 = 1, x_2 = 4$	3p 2p
4.	Numerele au forma $\overline{abc}$ unde $a, b, c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ cu $a \neq 0, a \neq b, b \neq c, a \neq c$ Pentru $a$ avem 4 posibilități, pentru $b$ avem 4 posibilități, iar pentru $c$ avem 3 posibilități Sunt $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ de astfel de numere	3p 2p
5.	Mijlocul $M$ al segmentului $AB$ are coordonatele $x_M = \frac{1+3}{2} = 2, y_M = \frac{3+5}{2} = 4$ Panta dreptei $AB$ este $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 1$ Din condiția de perpendicularitate $m_d m_{AB} = -1 \Rightarrow m_d = -1$ Ecuația mediatoarei: $y - y_M = m_d(x - x_M) \Leftrightarrow y - 4 = -1(x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 6$	2p 3p
6.	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$ Din $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ Atunci $\sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$	2p 3p

**SUBIECTUL II**

(30 de puncte)

1. a)	Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Relația $X \cdot A = A \cdot X \Leftrightarrow a + 4b = a, b = b, c + 4d = 4a + c, d = 4b + d$ Deducem $b = 0$ și $d = a$ Se ia $u = a \in \mathbb{R}$ și $v = c \in \mathbb{R}$ și obținem concluzia	3p 2p
b)	$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$ Prin inducție matematică se demonstrează că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4n & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	2p 3p
c)	Din ecuația $X^4 = A \Rightarrow X \cdot A = A \cdot X$ Conform subpunctului a) deducem că există $u, v \in \mathbb{R}$ , astfel încât $X = \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & u \end{pmatrix}$ .	

Probă scrisă la matematică  $M_{\text{șt-nat}}$   
Barem de evaluare și de notare

Simulare

	<p>Atunci <math>X^2 = \begin{pmatrix} u^2 &amp; 0 \\ 2uv &amp; u^2 \end{pmatrix}, X^4 = \begin{pmatrix} u^4 &amp; 0 \\ 4u^3v &amp; u^4 \end{pmatrix}</math></p> <p>Ecuția devine <math>\begin{pmatrix} u^4 &amp; 0 \\ 4u^3v &amp; u^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 4 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>, de unde <math>u^4 = 1, 4u^3v = 4 \Rightarrow</math></p> <p><math>(u, v) \in \{(-1, -1), (1, 1)\}</math>. Soluțiile ecuației sunt <math>X_1 = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 1 &amp; 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 &amp; 0 \\ -1 &amp; -1 \end{pmatrix}</math></p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
2. a)	<p><math>\forall x, y \in \mathbb{R}</math>, avem <math>x \circ y = 2xy + 2x + 2y + 1 = 2xy + 2x + 2y + 2 - 1 =</math>  <math>= 2x(y + 1) + 2(y + 1) - 1 =</math>  <math>= 2(y + 1)(x + 1) - 1 = 2(x + 1)(y + 1) - 1</math></p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
b)	<p>Din a) avem <math>a \circ b = 2(a + 1)(b + 1) - 1, a, b \in \mathbb{R}</math></p> <p>Alegem <math>a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}</math> astfel încât <math>a + 1 = \sqrt{2}</math> și <math>b + 1 = 2\sqrt{2}</math>, adică  <math>a = \sqrt{2} - 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, b = 2\sqrt{2} - 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}</math></p> <p>Atunci <math>(\sqrt{2} - 1) \circ (2\sqrt{2} - 1) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} - 1 = 8 - 1 = 7 \in \mathbb{N}</math></p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
c)	<p>Conform a) avem <math>x \circ x = 2(x + 1)^2 - 1, x \circ x \circ x = 4(x + 1)^3 - 1</math></p> <p>Ecuția devine <math>(x + 1)(2x + 1)(2x + 3) = 0</math></p> <p>Se obțin soluțiile reale <math>x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -\frac{3}{2}</math></p>	<p>2p</p> <p>3p</p>

**SUBIECTUL III**
**(30 de puncte)**

1. a)	<p>Funcția <math>f</math> este continuă pe <math>(0, \infty)</math> deci în aceste puncte nu avem asimptote verticale</p> <p><math>\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty</math>, deci dreapta de ecuație <math>x = 0</math> este asimptotă verticală</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0</math>, deci dreapta de ecuație <math>y = 0</math> este asimptotă orizontală spre <math>+\infty</math></p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
b)	<p>Funcția <math>f</math> este continuă și derivabilă pe <math>(0, \infty)</math> și <math>f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, x \in (0, \infty)</math>.</p> <p>Ecuția <math>f'(x) = 0</math> are soluția <math>x = e \in (0, \infty)</math>.</p> <p>Cum <math>f'(x) &gt; 0, \forall x \in (0, e)</math> și <math>f'(x) &lt; 0, \forall x \in (e, \infty)</math>, deduce că funcția <math>f</math> este strict crescătoare pe <math>(0, e]</math> și strict descrescătoare pe <math>[e, \infty)</math>.</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
c)	<p>Conform b), <math>x = e</math> este punct de maxim global, deci <math>f(e) = \frac{1}{e}</math> este maximul global al funcției, deci <math>f(x) \leq f(e) \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{1}{e}, \forall x \in (0, \infty)</math>.</p> <p>Se obține egalitate pentru <math>x = e</math>.</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
2. a)	<p><math>F</math> derivabilă pe <math>\mathbb{R}, F'(x) = (x - a)'e^x + (x - a)(e^x)' + (b)' = (x - a + 1)e^x, \forall x \in \mathbb{R}</math></p> <p><math>F</math> este primitivă pentru <math>f</math> deci <math>F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>Deducem că <math>a = 2</math>, iar <math>b</math> poate fi orice număr real.</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
b)	<p>Pentru <math>a = 2</math> și <math>b = e</math> obținem <math>F(x) = (x - 2)e^x + e \Rightarrow</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{2} = \frac{e}{2}</math></p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
c)	<p>Fie <math>G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math> o primitivă a funcției <math>F</math>. Atunci <math>G</math> este derivabilă pe <math>\mathbb{R}</math> și <math>G'(x) = F(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow G''(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>Cum <math>G''(x) \geq 0, \forall x \in [1, \infty)</math>, deducem că funcția <math>G</math> este convexă pe <math>[1, \infty)</math>.</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>