

## Examenul național de bacalaureat 2023

## Proba E. c)

Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$ 

Simulare

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

## SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1. Determinați al cincilea termen al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1 = -1$  și  $a_3 = 7$ .
- 5p 2. Determinați numărul real  $a$ , știind că punctul  $A(-1, a)$  aparține graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$ .
- 5p 3. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația  $5^{x^2-5x} = \frac{1}{625}$ .
- 5p 4. Aflați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu cifrele 0,2,4,6 și 8.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,3)$  și  $B(3,5)$ . Determinați ecuația mediatoarei segmentului  $[AB]$ .
- 5p 6. Știind că  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  și  $\sin x = \frac{1}{3}$ , calculați  $\sin(2x)$ .

## SUBIECTUL II

(30 puncte)

- 5p 1. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- 5p a) Să se arate că, dacă  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  verifică relația  $X \cdot A = A \cdot X$ , atunci există  $u, v \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $X = \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & u \end{pmatrix}$ .
- 5p b) Calculați  $A^n, n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p c) Rezolvați în  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , ecuația  $X^4 = A$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă, definită prin  $x \circ y = 2xy + 2x + 2y + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p a) Arătați că  $x \circ y = 2(x+1)(y+1) - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Aflați două elemente  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  astfel încât  $a \circ b \in \mathbb{N}$ .
- 5p c) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația  $x \circ x \circ x = x$ .

## SUBIECTUL III

(30 puncte)

- 5p 1. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .
- 5p a) Determinați asimptotele funcției  $f$ .
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
- 5p c) Arătați că  $f(x) \leq \frac{1}{e}, \forall x \in (0, \infty)$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^x$  și  $F(x) = (x-a)e^x + b$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- 5p a) Determinați numerele reale  $a, b$  știind că  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p b) Pentru  $a = 2$  și  $b = e$ , calculați  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{(x-1)^2}$ .
- 5p c) Arătați că orice primitivă a funcției  $F$  este convexă pe intervalul  $[1, \infty)$ .