

Examenul de bacalaureat național 2023

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE simulare noiembrie 2022

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

Subiectul I

(30 puncte)

1.	$z = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{4+1} = \frac{2-i}{5}$ $\Rightarrow \text{Im}(z) = \frac{2}{5}$	3p 2p
2.	$\Delta = 9 - 4(-n+5)$ $= 9 + 4n - 20 = 4n - 11$ <p>Cum ecuația nu are soluții reale $\Rightarrow \Delta < 0$</p> <p>Deci obținem $4n - 11 < 0 \Leftrightarrow n < \frac{11}{4}$</p> <p>Prin urmare cel mai mare număr natural care îndeplinește soluția este $n = 2$</p>	3p 2p
3.	$\log_3(x^2 + 3) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 3 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 0$ $\Rightarrow x = 0$ <p>Verificare: $\log_3(0^2 + 3) = \log_3 3 = 1$</p>	3p 2p
4.	<p>numărul tuturor submulțimilor mulțimii $A = \{0; 1; \dots; 4\}$ este $2^5 = 32$.</p> <p>Mulțimea vidă este mulțimea cu niciun element</p> <p>numărul de submulțimi cu un element ale mulțimii A este 5</p> <p>numărul de submulțimi cu cel puțin două elemente ale mulțimii este $32 - 1 - 5 = 26$</p>	3p 2p
5.	<p>Condiția de perpendicularitate a dreptelor d_1 și d_2 este $m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1$</p> $m_{d_1} = \frac{1}{3} \text{ și } m_{d_2} = m - 1$	3p 2p

	Deci $\frac{1}{3} \cdot (m-1) = -1 \Leftrightarrow m-1 = -3 \Leftrightarrow m = -2$	
6.	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4}$. Deci $\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ avem	3p
	$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	
	$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	2p

Subiectul al II-lea

(30 puncte)

1a	$A(m)$ inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(m)) \neq 0$	3p
	$\det(A(m)) = (m+2)(m-1)^2$	2p
	$\det(A(m)) = 0 \Leftrightarrow m \in \{-2, 1\} \Rightarrow A(m)$ inversabilă $\Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$	
1b	$A^{-1}(-1) \cdot A(-1) = A(-1) \cdot A^{-1}(-1) = I_3 \Rightarrow A^{-1}(-1) = \frac{1}{2} A(0) \Leftrightarrow$	2p
	$\frac{1}{2} A(0) \cdot A(-1) = A(-1) \cdot \frac{1}{2} A(0) = I_3$	
	$\frac{1}{2} A(0) \cdot A(-1) = I_3$ și $A(-1) \cdot \frac{1}{2} A(0) = I_3$, deci $\Rightarrow A^{-1}(-1) = \frac{1}{2} A(0)$	3p
1c	$A(-1) \cdot X = B$ înmulțim la stânga cu $\Rightarrow A^{-1}(-1) = \frac{1}{2} A(0)$ (cf b) \Rightarrow	2p
	$X = \frac{1}{2} A(0) \cdot B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	3p
2a	$x * (-15) = \frac{1}{5} x \cdot (-15) + 3x - 45 + 30 =$	3p
	$= -3x + 3x - 45 + 30 = -15, \forall x \in \mathbb{Q}.$	2p
2b	orice exemplu corect de numere $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ și demonstrația faptului că $x * y \in \mathbb{Z}$ se punctează cu 5p	3p

	$x = -\frac{15}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, y = -\frac{43}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow$ $x * y = \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{15}{2}\right) \left(-\frac{43}{3}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{15}{2}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{43}{3}\right) + 30 =$ $= \frac{43}{2} - \frac{45}{2} - 43 + 30 = -1 - 43 + 30 = -14 \in \mathbb{Z}$	2p
2c	$x * y = \frac{1}{5}(x+15)(y+15) - 15, (\forall) x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x \cdot y) = 5xy - 15 \quad (\forall) x, y \in \mathbb{Q}$ <p>(1)</p> $f(x) * f(y) = \frac{1}{5}(f(x)+15)(f(y)+15) - 15 = \frac{1}{5}(5x-15+15)(5y-15+15) - 15 =$ $= \frac{1}{5} \cdot 25xy - 15 = 5xy - 15, (\forall) x, y \in \mathbb{Q} \quad (2). \text{ Din (1) și (2) } \Rightarrow f(xy) = f(x) * f(y)$ <p>$(\forall) x, y \in \mathbb{Q}$</p>	2p 3p

Subiectul al III-lea

(30 puncte)

1. a)	$f'(x) = 1 + \frac{(x^2 + 2x + 2)'}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$ $f'(x) = 1 + \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}} = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}) =$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 + 2x + 2})(x - \sqrt{x^2 + 2x + 2})}{(x - \sqrt{x^2 + 2x + 2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 - x^2 - 2x - 2)}{(x - \sqrt{x^2 + 2x + 2})} =$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-2x - 2)}{(x - \sqrt{x^2 + 2x + 2})} = -1$ <p>Dreapta de ecuație $y = -1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.</p>	1p 1p 1p 2p
c)	$f'(x) = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{\sqrt{x^2+2x+2} + (x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}} > 0, x \in \mathbb{R}$ <p>f este strict crescătoare pe \mathbb{R}.</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$ <p>$\text{Im}(f) = (-1, +\infty)$</p>	2p 1p 1p 1p
2. a)	<p>$F(x)$ este derivabilă pe $(0, +\infty)$. $F'(x) = (-e^{-x} + x - 2\ln(x))' =$ $(-e^{-x})' + x' - (2\ln(x))'$ $F'(x) = \frac{1}{e^x} + 1 - \frac{2}{x} = \frac{1}{e^x} + \frac{x-2}{x} = f(x) \quad \forall x \in (0, +\infty)$ F este o primitivă a funcției f.</p>	2p 2p 1p
b)	$\int x f(x) dx = \int x \left(\frac{1}{e^x} + \frac{x-2}{x} \right) dx = \int \frac{x}{e^x} dx + \int (x-2) dx =$	2p



	$-\frac{x}{e^x} - \int \left(-\frac{1}{e^x}\right) dx + \frac{x^2}{2} - 2x = -\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \frac{x^2}{2} - 2x + C$	3p
c)	$G(x) = F(x) + \alpha, G(x) = -e^{-x} + x - 2 \ln(x) + \alpha$	2p
	$G(1) = \frac{-1}{e} + 1 - 2 \ln(1) + \alpha = \frac{-1+e}{e} + \alpha = \frac{e+1}{e}$	2p
	$\alpha = \frac{e+1}{e} - \frac{-1+e}{e} = \frac{2}{e}, G(x) = F(x) + \frac{2}{e}$	1p

Prof. propunători:

Daniel Prutescu (liceul german H. OBERTH)

Cristina Hlevca (liceul teoretic I. PETRUȘ)

Mihai Apostol (liceul teoretic H. HULUBEI)

SIMULARE ILFOV