

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică M_șt-nat
Simulare-3.02.2023
Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

Subiectul I
(30 de puncte)

- 5p 1. Fie numărul real $a = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$. Arătați că a^2 este un număr natural.
- 5p 2. Determinați numărul real m știind că vârful parabolei asociată lui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = mx^2 + 4x - 6$ are abscisa egală cu ordonata.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{1+x} = 2\sqrt{3}x$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor de două cifre acesta să aibă o cifră pară și una impară
- 5p 5 Se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-2,0)$ și $C(0,3)$. Determinați lungimea vectorului \overline{OD} , știind că $ABCD$ este paralelogram, iar O este originea reperului cartezian.
- 5p 6. Arătați că $\sin 3x + \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Subiectul II
(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$
- 5p a) Arătați că $\det A(-1) = 17$.
- 5p b) Demonstrați că $A(2023 - a) + A(2023 + a) = 2A(2023)$.
- 5p c) Determinați perechile de numere reale x și y pentru care $A(x)A(y) = 2A(-8)$.
2. Se consideră pe mulțimea $G = (-2,2)$ legea de compoziție $x * y = \frac{4x+4y}{4+xy}$
- 5p a) Arătați că 0 este elementul neutru al legii de compoziție $*$.
- 5p b) Rezolvați în G ecuația $x * x = 8/5$
- 5p c) Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow G, f(x) = \frac{2(x-1)}{x+1}$. Arătați că $f(xy) = f(x) * f(y)$, orice $x, y > 0$

Subiectul III
(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} \ln x$.
- 5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$.
- 5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul lui f în punctul de intersecție al graficului cu axa Ox .
- 5p c) Folosind monotonia funcției f să se arate că $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 6}$
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{13}{3}$.
- 5p b) Calculați $\int_1^2 \frac{x-2}{f(x)} dx$.
- 5p c) Arătați că $\sqrt{2} \leq \int_1^2 f(x) dx \leq \sqrt{3}$.

SUBIECTUL III-Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

- (5p) a) Arătați că f este continuă în punctul $x_0 = 1$.
(5p) b) Stabiliți dacă f este derivabilă în punctul $x_0 = 1$.
(5p) c) Arătați că f este descrescătoare.

2. Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{t+1} dt$

- (5p) a) Calculați $f(1)$.
(5p) b) Arătați că $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x+1}$.
(5p) c) Arătați că $f(x) \geq \frac{1}{2(x+1)}, \forall x \in (1, \infty)$