

Examenul Național de bacalaureat 2023**Proba E.c)****Matematică $M_mate-info$** **Simulare Vrancea***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I -Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.**(30 de puncte)**

- (5p) 1. Câte elemente are mulțimea $(\log_2 5, \log_2 9) \cap \mathbb{Z}$?
- (5p) 2. Știind că dreapta $x=1$ este axă de simetrie a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2 \cdot b \cdot x + 3 \cdot c$ și că punctul $A(1,2)$ aparține graficului, determinați numerele reale b și c .
- (5p) 3. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația : $\sqrt[3]{x+1} = x+1$.
- (5p) 4. Determinați numărul funcțiilor $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ pentru care $f(2)=f(-2)$.
- (5p) 5. Fie dreptele d_1 și d_2 de ecuații $x - 3y + 1 = 0$ și respectiv $3x + y + 2 = 0$, a un număr real și punctul $P(0, a)$. Determinați valorile lui a , știind că punctul P este egal depărtat de dreptele d_1 și d_2 .
- (5p) 6. Arătați că $\sin x + \sqrt{3} \cos x \leq 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II -Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A(m) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$ și $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- (5p) a) Rezolvați ecuația $\det(A(m)) = 0$, $m \in \mathbb{R}$.
- (5p) b) Arătați că $A^{-1}(-1) = \frac{1}{2}A(0)$.
- (5p) c) Determinați $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $A(-1) \cdot X = B$.
2. Pe mulțimea numerelor raționale \mathbb{Q} se definește legea de compoziție $x * y = \frac{1}{5}xy + 3x + 3y + 30$.
- (5p) a) Aflați numărul rațional a pentru care $x * a = a$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.
- (5p) b) Dați exemplu de două numere raționale x și y care nu sunt numere întregi și pentru care $x * y$ este număr întreg.
- (5p) c) Arătați că funcția $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = 5x - 15$ are proprietatea $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$.

SUBIECTUL III-Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

- (5p) a) Arătați că f este continuă în punctul $x_0 = 1$.
(5p) b) Stabiliți dacă f este derivabilă în punctul $x_0 = 1$.
(5p) c) Arătați că f este descrescătoare.

2. Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{t+1} dt$

- (5p) a) Calculați $f(1)$.
(5p) b) Arătați că $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x+1}$.
(5p) c) Arătați că $f(x) \geq \frac{1}{2(x+1)}, \forall x \in (1, \infty)$