

Simulare, Bacalaureat, 11 mai 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

SUBIECTUL I
(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați a_{2023} , știind că $(a_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică cu $a_1 = 2023$ și $r = -1$.
- 5p 2. Arătați că $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 23$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 3x + 10 = 0$.
- 5p 3. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^{x+1} - 1$ cu axele Ox și respectiv Oy .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu 2 elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$, aceasta să fie formată doar din numere prime.
- 5p 5. Calculați $\vec{a} \cdot \vec{b}$, știind că $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ și unghiul vectorilor \vec{a} și \vec{b} are măsura $\frac{\pi}{3}$.
- 5p 6. Arătați că $2\sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1 = 0$, știind că $\sin x = \frac{1}{3}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea
(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Calculați $\det(A(2))$.
- 5p b) Determinați numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(-x) = I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Arătați că $\det(A(1) + A(2) + \dots + A(n)) = \frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$, pentru orice număr natural nenul n .
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + (m-3)X^2 - 17X + (2m+7)$, cu $m \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X-1$.
- 5p b) Pentru $m=4$ arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -62$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^x + 9^x - 17 \cdot 3^x + 15 = 0$.

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} - x - 2$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} - 1, x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Demonstrați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că imaginea funcției f este intervalul $(0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$.

5p a) Calculați $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1} \right) dx$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 xf(x)dx = \frac{4}{3} - \ln 2$.

5p c) Determinați numărul natural nenul n , știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $\frac{1}{2} + \ln(n^2 + n)$.