Simulare, Bacalaureat, 11 mai 2023
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	$z=i$	**2p**
	$\overline{z}=-i$	**1p**
	$a=0, b=-1$	**2p**
2.	$\dfrac{m^2-1}{4}=2 \Rightarrow m^2-9=0$	**3p**
	$m=-3$ nu convine, $m=3$ convine	**2p**
3.	$1+7x=1+3x+3x^2+x^3$	**1p**
	$x\left(x^2+3x-4\right)=0$	**1p**
	$x_1=0, x_2=1, x_3=-4$	**3p**
4.	$p=\dfrac{nr.cazuri \quad favorabile}{nr.cazuri \quad posibile}$	**1p**
	Submulțimile cu 3 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice sunt: $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$ și $\{1,3,5\} \Rightarrow 4$ cazuri favorabile	**2p**
	Numărul submulțimilor cu 3 elemente este $C_5^3=10 \Rightarrow p=\dfrac{2}{5}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AB}=3\vec{i}$ și $\overrightarrow{AM}=\left(x_M-1\right)\vec{i}+\left(y_M-1\right)\vec{j}$	**2p**
	$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x_M=2 \\ y_M=1 \end{cases}$	**3p**
6.	$S_{ABC}=12$	**2p**
	$R=\dfrac{abc}{4S}$	**2p**
	$R=\dfrac{25}{8}$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1. a)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & y & y^2\\ 0 & 1 & 2y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}1 & x+y & (x+y)^2\\ 0 & 1 & 2(x+y)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A(x+y)$	**3p**
b)	$A(x)-A(y)=\begin{pmatrix}0 & x-y & x^2-y^2\\ 0 & 0 & 2(x-y)\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(A(x)-A(y)\right)^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2(x-y)^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
	$\left(A(x)-A(y)\right)^3=O_3\Rightarrow\left(A(x)-A(y)\right)^{2023}=O_3$	**2p**
c)	Matricea A este inversabilă	**1p**
	$\left(A(x)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $A(-x)=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	Deci $\left(A(x)\right)^{-1}=A(-x)$, unde $x\in\mathbb{R}$	**1p**
2. a)	$f(2)=16-12+4+1=9\Rightarrow$	**3p**
	Restul împărțirii polinomului f la $X-2$ este $f(2)=9$	**2p**
b)	Presupunem că polinomul f are rădăcini raționale, f are coeficienți întregi, rădăcinile raționale pot fi 1 sau -1.	**2p**
	$f(1)=1-3+2+1=1\neq 0$ și $f(-1)=1-3-2+1=-3\neq 0$ deci presupunerea este falsă, atunci f nu are rădăcini raționale.	**3p**
c)	x_1 este rădăcină a lui $f\Rightarrow x_1^4-3x_1^2+2x_1+1=0\,\Big\vert : x_1\neq 0\Rightarrow x_1^3-3x_1+2+\dfrac{1}{x_1}=0$. Analog $x_2^3-3x_2+2+\dfrac{1}{x_2}=0, x_3^3-3x_3+2+\dfrac{1}{x_3}=0, x_4^3-3x_4+2+\dfrac{1}{x_4}=0$.	**3p**
	Adunăm relațiile și obținem $\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3\right)+\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}\right)=3\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)-8=3\cdot 0-8=-8$.	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1. a)	$f'(x)=\frac{(2x+1)'e^x-e^x(2x+1)}{e^{2x}}=$	**2p**
	$=\frac{(2-2x-1)e^x}{e^{2x}}=\frac{1-2x}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0\Rightarrow$	**3p**
	$\Rightarrow y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.	**2p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$, $f'(x)<0$ pentru orice $x\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $\left(\frac{1}{2},\infty\right)\Rightarrow f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$,	**3p**
	$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{e^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{e}}\Rightarrow f(x)\le\frac{2}{\sqrt{e}}\Rightarrow\frac{2x+1}{e^x}\le\frac{2}{\sqrt{e}}\Rightarrow(2x+1)\sqrt{e}\le 2e^x$, pentru orice număr real x.	**2p**
2. a)	$I_2=\int_0^1 1dx-2\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 x^4dx==\left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{8}{15}$	**2p**
b)	$I_n-I_{n+1}=\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^n dx\ge 0$ pentru orice n, deci șirul este descrescător	**3p**
	$I_n\ge 0$, deci șirul este mărginit inferior	**1p**
	Finalizare	**1p**
c)	$I_n=x\left(1-x^2\right)^n\Big\vert_0^1-n\int_0^1 x\left(1-x^2\right)^{n-1}\cdot(-2x)dx=$	**2p**
	$=-2n\int_0^1\left[\left(1-x^2\right)-1\right]\left(1-x^2\right)^{n-1}dx=$	**1p**
	$=-2nI_n+2nI_{n-1}\Rightarrow(2n+1)I_n=2nI_{n-1},\forall n\ge 2$	**2p**