

Subiectul I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați numărul real m pentru care $x_1 = 1 - i$ este soluție a ecuației $x^2 - 2x + m = 0$.
- 5p** 2. Determinați $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care soluțiile ecuației $2ax^2 + (3a - 5)x + a - 3 = 0$ verifică relația $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq 1$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{\log_2(1+x)}{\log_2(1-x)} = 2$.
- 5p** 4. Determinați numărul funcțiilor $f: \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3,4\}$ pentru care $f(1)$ este număr prim.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4; 0)$ și $B(2; 2)$. Scrieți ecuația mediatoarei segmentului AB .
- 5p** 6. Rezolvați în $[0, 2\pi]$ ecuația $2 \sin^2 x + \sin 2x = 0$.

Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.
- 5p** a) Calculați $\det(A(0))$.
- 5p** b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea $A(m)$ este inversabilă.
- 5p** c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1; 1), B(m; m^2)$ și $C(m+1; (m+1)^2)$. Aflați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 1$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă „ $*$ ” definită prin $x * y = 3xy - 3x - 3y + 4$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Determinați $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x * y = 3(x-1)(y-1) + k$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați că $H = (1; +\infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** c) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $x * x * x * x = 28$.

Subiectul al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Demonstrați că f este inversabilă.
- 5p** c) Arătați că $f(x) < x$, $(\forall)x > 0$.
2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ și $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a sa.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{e-1}{2e}$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(\cos x) - F(1)}{x^2}$.
- 5p** c) Demonstrați că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = F(x) + f(x)$ are exact un punct de extrem local.