EXAMENUL DE BACALAUREAT NAȚIONAL 2023

Proba E.c) M_*st. naturii*

Simulare județeană

BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

BAREM ORIENTATIV DE EVALUARE

Subiectul I **(30 puncte)**

1.	Avem $16<23<25 \Rightarrow 4<\sqrt{23}<5$, de unde $\left[\sqrt{23}\right]=4$	2p
	Se obține: $\left(\sqrt{23}+4\right)\cdot\left\{\sqrt{23}\right\}=\left(\sqrt{23}+4\right)\cdot\left(\sqrt{23}-\left[\sqrt{23}\right]\right)=\left(\sqrt{23}+4\right)\cdot\left(\sqrt{23}-4\right)=7$.	3p
2.	$(f\circ g)(x)=f(g(x))=4g(x)-5=4(x+a)-5=4x+4a-5$	3p
	$(f\circ g)(x)=4x-3 \Leftrightarrow 4x+4a-5=4x+3$, de unde $a=2$.	2p
3.	$5^{2x+1}-26\cdot5^x+5=0 \Leftrightarrow 5\cdot5^{2x}-26\cdot5^x+5=0$. Notăm $5^x=t>0 \Rightarrow 5t^2-26t+5=0$	2p
	Se obține $t_1=\frac{1}{5} \Rightarrow 5^x=\frac{1}{5}$, de unde $x_1=-1$ și $t_2=5 \Rightarrow 5^x=5$, de unde $x_2=1$.	3p
4.	Se pot forma $C_4^2=6$ echipe de câte 2 biologi și $C_8^3=56$ echipe de câte 3 chimiști	3p
	Se pot forma echipe de câte 5 cercetători în număr de $C_4^2\cdot C_8^3=336$ moduri.	2p
5.	Vectorii $\vec{u}=m\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-1)\vec{i}+2\vec{j}$ sunt ortogonali dacă și numai dacă $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow m(m-1)-6=0$,	3p
	adică $m^2-m-6=0$, cu soluțiile $m_1=-2$ și $m_2=3$.	2p
6.	Din $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ se obține $\lvert\cos x\rvert=\sqrt{1-\sin^2 x}$. Pentru $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ avem $\cos x=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$	3p
	Avem $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$.	2p

Subiectul II **(30 puncte)**

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +4 (0) 254213315, +4 (0) 254215755
inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro

1. a)	Avem $A-xI_2=\begin{pmatrix}1-x & 0\\ 0 & 9-x\end{pmatrix}$,	2p
	de unde $\det(A-xI_2)=0 \Leftrightarrow (1-x)(9-x)=0$	2p
	$x_1=1, x_2=9$	1p
b)	Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. Din $AX=XA \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ 9c & 9d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 9b\\ c & 9d\end{pmatrix}$	2p
	$\Rightarrow 9b=b\ si\ 9c=c \Rightarrow b=c=0,\ a,d\overset{not}{=}b\in\mathbb{R}$	2p
	Se obține $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$.	1p
c)	$X^2=A \Leftrightarrow X^3=AX\ si\ X^3=XA$, deci $AX=XA$	2p
	Din punctul b) avem $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix} \Rightarrow X^2=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & b^2\end{pmatrix}$	1p
	$\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix} \Rightarrow a^2=1$ și $b^2=9$, de unde $a\in\{-1,1\}, b\in\{-3,3\}$,	1p
	adică există $2^2=4$ matrice, care sunt soluții ale ecuației.	1p
2. a)	G este parte stabilă dacă $\forall x,y\in G \Rightarrow x\circ y\in G$ Din $x\in G \Leftrightarrow x\in(8,\infty) \Leftrightarrow x>8 \Leftrightarrow x-8>0$ și $y\in G \Leftrightarrow y\in(8,\infty) \Leftrightarrow y>8 \Leftrightarrow y-8>0$	3p
	se obține $(x-8)(y-8)>0 \Leftrightarrow xy-8x-8y+64>0$,	1p
	adică $xy-8x-8y+72>8 \Leftrightarrow x\circ y\in G$.	1p
b)	Asociativitate, Comutativitate	1p
	Element neutru: $\exists e\in G\ a.\hat{i}.\ x\circ e=e\circ x=x,\ \forall x\in G$. Se obţine $e=9\in G$.	2p
	Elemente simetrizabile: $\forall x\in G, \exists x'\in G\ a.\hat{i}.\ x\circ x'=x'\circ x=9$, se obţine $x'=\dfrac{8x-63}{x-8}=8+\dfrac{1}{x-8}\in G,\ \forall x>8$.	2p
c)	Injectivitate: $\forall x_1,x_2\in(0,\infty),\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$, adică $x_1+8=x_2+8\Rightarrow x_1=x_2$	2p

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +4 (0) 254213315, +4 (0) 254215755
inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro

	Surjectivitate: $\forall y \in G, \exists x \in (0,\infty)$ a.î. $f(x) = y$, adică $x+8 = y \Rightarrow x = y-8 > 0$	1p
	Funcția f este morfism: Din $f(x \cdot y) = xy+8$ și $f(x) \circ f(y) = (x+8) \circ (y+8) = xy+8$ se obține $f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in (8,\infty)$.	2p

Subiectul III **(30 puncte)**

1. a)	$f'(x) = \left(\ln x - \frac{x-1}{2x}\right)' = \frac{1}{x} - \frac{(x-1)' \cdot 2x - (x-1)\cdot(2x)'}{(2x)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} = \frac{2x-1}{2x^2}$, $x \in (0,\infty)$	2p
	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$	2p
	Se obține că $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$.	1p
b)	Inegalitatea se scrie: $\ln x - \frac{x-1}{2x} \geq 0, \ \forall x \in [1,\infty)$ și fie $g:[1,\infty) \to \mathbb{R}, \ g(x) = \ln x - \frac{x-1}{2x}$	2p
	Avem $g'(x) = \frac{2x-1}{2x^2}$, $x \in [1,\infty)$ și din tabelul de semn al derivatei funcției g avem că g este funcție crescătoare și $g(x) \geq 0, \ \forall x \in [1,\infty]$.	2p
	$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x - \frac{x-1}{2x} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{x-1}{2x}, \ \forall x \in [1,\infty]$.	1p
c)	$f''(x) = \left(\frac{2x-1}{2x^2}\right)' = \frac{1-x}{x^3}$, $x \in (0,\infty)$	2p
	$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x^3} = 0 \Rightarrow x = 1$.	1p
	Din tabelul cu semnul derivatei a doua avem că pentru $x \in (0,1)$ avem $f''(x) > 0$, adică funcția f este convexă și pentru $x \in (1,\infty)$ avem $f''(x) < 0$, adică funcția f este concavă. Deci graficul funcției are un punct de inflexiune, $P(1,0)$.	2p
2. a)	$\int_1^2 (x^3 + 2x^2 + 3x) \cdot f(x)\, dx = \int_1^2 x(x^2+2x+3) \cdot \frac{x+2}{x^2+2x+3}\, dx = \int_1^2 (x^2+2x)\, dx$	2p
	$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big\|_1^2 = \frac{16}{3}$.	3p

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +4 (0) 254213315, +4 (0) 254215755
inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro

b)	$\int_0^1\left(f(x)+\frac{x}{x^2+2x+3}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{x+2}{x^2+2x+3}+\frac{x}{x^2+2x+3}\right)dx=\int_0^1\frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx$	2p
	$=\int_0^1\frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3}dx=\ln(x^2+2x+3)\Big\|_0^1$	2p
	$=\ln 2$.	1p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)}{\ln x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F'(x)}{(\ln x)'}$	2p
	$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2+2x+3}$	2p
	$=1$.	1p

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +4 (0) 254213315, +4 (0) 254215755
inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro