

Simulare, Bacalaureat, 17 ianuarie 2023

Proba E. c)

Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p 1. Arătați că numărul  $A = z(2 + 3i) + \bar{z}(2 - 3i)$  este real pentru orice număr complex  $z$ , unde  $\bar{z}$  este conjugatul lui  $z$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ . Demonstrați că funcția  $f$  este impară.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\lg(1-x) + 1 = \lg(7-x)$ .
- 5p 4. Determinați numărul funcțiilor  $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$  care sunt strict descrescătoare.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1, -2)$ ,  $B(-1, 2)$  și  $C(0, 3)$ . Determinați coordonatele punctului  $D$ , știind că  $ABCD$  este paralelogram.
- 5p 6. Lungimile laturilor unui triunghi sunt egale cu 5, 6 și 8. Arătați că triunghiul este obtuzunghic.

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ 4 & 9 & a^2 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + az = 1 \\ 4x + 9y + a^2z = a - 3 \end{cases}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(1)) = 2$ .
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $a$  pentru care matricea  $A(a)$  este inversabilă.
- 5p c) Pentru  $a = 4$ , rezolvați sistemul de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = 4x + 4y - 4xy - 3$ .
- 5p a) Demonstrați că  $x * y = 1 - 4(x-1)(y-1)$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p b) Arătați că  $x * \frac{1}{x} \geq 1$ , pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .
- 5p c) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x * x * x * x = x$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{(3-x)(x+1)}{(x^2+3)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că  $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{6}$ , pentru orice număr real  $x$ .

---

2. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x - x$ .

5p

a) Calculați  $\int (x - f(x) + \ln x) dx$ .

5p

b) Demonstrați că orice primitivă  $F$  a funcției  $f$  este concavă pe intervalul  $(1, \infty)$ .

5p

c) Determinați primitiva  $G$  a funcției  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = xf(x)$ , al cărei grafic trece prin punctul

$A\left(1, \frac{5}{12}\right)$ .