Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE **Simulare**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvari parţiale, în limitele punctajului indicat în barem**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare**

SUBIECTUL I		**(30 de puncte)**
1.	Din $a_3 + a_4 = 8$ obținem $2a_1 + 5r = 8$, de unde pentru $r = 2$, deducem că $a_1 = -1$ Suma primilor patru termeni este $S_4 = 8$.	**3p** **2p**
2.	Folosind relațiile lui Viète avem $x_1 + x_2 = -3m$ și $x_1x_2 = -m - 2$. Cum $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1 \Rightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = 1 \Rightarrow \frac{-3m}{-m-2} = 1 \Rightarrow m = 1$.	**2p** **3p**
3.	$\sqrt{16 + x^2} = 11 - 2x \Rightarrow 16 + x^2 = (11 - 2x)^2 \Rightarrow 3x^2 - 44x + 105 = 0$ Obținem $x = \frac{35}{3}$ care nu convine și $x = 3$, care convine.	**3p** **2p**
4.	Notăm $\overline{abc}$ numerele de trei cifre distincte din ipoteză, a poate lua 5 valori (oricare din cifrele 1,2,3,4,5), b poate lua 5 valori (oricare din cifrele 0,1,2,3,4,5 mai puțin valoarea luată de a), c poate lua 4 valori (oricare din cifrele 0,1,2,3,4,5 mai puțin valorile luate de a și b). Rezultă că numărul numerelor de trei cifre distincte este $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$	**3p** **2p**
5.	Fie M, N mijloacele laturilor AB respectiv $AC \Rightarrow M(3, -2),\ N(0, -1)$. Ecuația liniei mijlocii este MN: $\frac{x-x_N}{x_M-x_N} = \frac{y-y_N}{y_M-y_N} \Rightarrow MN: x + 3y + 3 = 0$	**2p** **3p**
6.	$\frac{AB}{\sin C} = 2R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului Cum $\sin C = \frac{1}{2}$, obținem $R = 6$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea		**(30 de puncte)**
1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$ $= 2 - 6 + 4 - 6 - 1 + 8 = 1$	**2p** **3p**
b)	Deoarece $\det(A(2)) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat, se rezolvă cu regula Cramer. Calculăm $\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -2$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2$, Obținem mulțimea soluțiilor sistemului de ecuații $S = \{(1, -2, -2)\}$	**1p** **3p** **1p**
c)	Pentru m $= 3$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt de forma $\left(\frac{9+\alpha}{5}, \frac{3+7\alpha}{5}, \alpha\right)$ unde α este un număr întreg. Cum $x_0 + y_0z_0 = 4 \Leftrightarrow \frac{9+\alpha}{5} + \frac{3+7\alpha}{5}\alpha = 4 \Leftrightarrow 7\alpha^2 + 4\alpha - 11 = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \left\{1, -\frac{11}{7}\right\}$. Cum $-\frac{11}{7} \notin \boldsymbol{Z}$, soluția cu componente întreagi a sistemului care verifică relația este $(2,2,1)$.	**3p** **2p**
2.a)	Utilizând asociativitatea obținem că $x * y * z = (x * y) * z = [2(x-3)(y-3) + 3] * z =$ $= 2[2(x-3)(y-3) + 3 - 3](z-3) + 3 = 4(x-3)(y-3)(z-3) + 3$ pentru orice $x, y, z \in \boldsymbol{R}$.	**2p** **3p**
b)	Calculăm $x * \left(\frac{7}{2}\right) = 2(x-3)\left(\frac{7}{2} - 3\right) + 3 = 2(x-3)\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = x - 3 + 3 = x$ pentru orice $x \in G$. Tot prin calcul, $\left(\frac{7}{2}\right) * x = x$ pentru orice $x \in G$, deci $e = \frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p** **2p**
c)	Deducem din inducția matematică că $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{de\ 2023\ ori\ x} = 2^{2022}(x-3)^{2023} + 3$. Ecuația dată este echivalentă cu $(x-3)^{2023} = 0$ de unde obținem x=3	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea		**(30 de puncte)**
1.a)	$f'(x)=\frac{1-x}{x^2},\ x\in\boldsymbol{R}$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$	**2p**
b)	Calculăm $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ și deducem că *f* nu are asimptotă orizontală, apoi calculăm $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1-x\ln x}{x^2}=0$ și deducem că *f* nu are asimptotă oblică.	**3p**
	Calculăm $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=1-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1+x\ln x}{x}=-\infty\Rightarrow$ dreapta $x=0$ este unica asimptotă a funcției *f*	**2p**
c)	$f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0,1]$ $f'(x)\leq 0$ pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $f(x)\leq f(1)=0\Rightarrow$ $f(x)\leq 0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	Deci $1-\frac{1}{x}-\ln x\leq 0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$ de unde obținem că $1+x\ln x\geq x$, pentru orice număr real x strict pozitiv.	**2p**
2.a)	$g'(x)=(e^x\sin x)'=(e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'=e^x(\sin x+\cos x)$	**3p**
	$\Rightarrow g'(x)=f(x)$ pentru orice număr real x, deci g este o primitivă a funcției f .	**2p**
b)	Calculăm primitivele funcției g: $\int e^x\sin x\ dx=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$	**3p**
	Notăm cu $G:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ primitiva lui g a cărei reprezentare grafică conține punctul $O(0,0)\Rightarrow$ $\frac{e^0(\sin 0-\cos 0)}{2}+C=0\Rightarrow C=\frac{1}{2}$. Deci $G(x)=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+\frac{1}{2}$.	**2p**
c)	Fie F o primitivă oarecare a lui $f\ \Rightarrow F'(x)=f(x)$ pentru orice număr real $x\Rightarrow F''(x)=f'(x)=$ $=2e^x\cos x$ pentru orice număr real x.	**3p**
	Dacă $x\epsilon\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos x\geq 0,\ \ e^x>0$ deci $F''(x)\geq 0\ \ \forall x\epsilon\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, de unde obținem că F este convexă pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.	**2p**