

Examenul național de bacalaureat 2023**Simulare județeană****Proba Ec)****Matematică M_mate-info****BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE****Varianta 1***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctaj corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I**(30 de puncte)**

1.	$z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z^3 = 1$ $z^{2023} = (z^3)^{674} \cdot z = z$, de unde obținem $z^{2023} + \frac{1}{z^{2023}} = z + \frac{1}{z} = -1$.	2p 3p
2.	$f\left(x + \frac{1}{2023}\right) = \left\{2023\left(x + \frac{1}{2023}\right)\right\} = \{2023x + 1\}$ $= \{2023x\} = f(x)$, pentru orice număr real x .	3p 2p
3.	$(2^x - 1)(2^x - 4) = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1$ sau $2^x = 4$ $x = 0$ sau $x = 2$.	3p 2p
4.	Sunt $8 \cdot 9 = 72$ de numere naturale de două cifre care nu conțin cifra 2, deci sunt 72 de cazuri favorabile. Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile. $P = \frac{\text{nr.cazuri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}} = \frac{72}{90} = \frac{4}{5}$.	2p 1p 2p
5.	$M(-1, 2)$, unde M este mijlocul segmentului AD , $m_{AB} = 1$. Cum MN este paralelă cu AB , ecuația dreptei MN este $MN: x - y + 3 = 0$.	3p 2p
6.	$\frac{\sin a - \cos a}{\sin a + \cos a} = \frac{\cos a \left(\frac{\sin a}{\cos a} - 1\right)}{\cos a \left(1 + \frac{\sin a}{\cos a}\right)} = \frac{\operatorname{tga} - 1}{1 + \operatorname{tga}} =$ $= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea**(30 de puncte)**

1.a)	$A(10) = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(10)) = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{vmatrix} =$ $= 2^{10} = 1024$.	2p 3p
b)	$A(x) \cdot A(2x) = A(3x)$ $A(3x) = A(x^2 + 2) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ și $x_2 = 2$.	2p 3p
c)	Deoarece $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$ pentru orice numere reale x și y , obținem $A(n) = A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(2022) = A(1 + 2 + \dots + 2022) = A(2023 \cdot 1011)$, $n=2023 \cdot 1011$, deci n este număr natural divizibil cu 2023.	3p 2p
2.a)	$x * y = 3xy - 3x - 3y + 4 = 3(xy - x - y + 1) + 1 =$ $= 3(x - 1)(y - 1) + 1$, pentru orice numere reale x și y .	3p 2p
b)	$x * 1 = 1 * y = 1$, pentru orice numere reale x, y . $\frac{1}{1011} * \frac{2}{1011} * \frac{3}{1011} * \dots * \frac{2023}{1011} =$	2p

	$= \left(\frac{1}{1011} * \frac{2}{1011} * \dots * \frac{1010}{1011} \right) * \frac{1011}{1011} * \left(\frac{1012}{1011} * \frac{1013}{1011} * \dots * \frac{2032}{1011} \right) = 1.$	3p
c)	Elementul neutru este $\frac{4}{3}$. $x * x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(x - 1)^2 + 1 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow (x - 1)^2 = \frac{1}{9}$. $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{4}{3}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	Calculul limitelor laterale în $x = -2$, dreapta $x = -2$ asimptotă verticală Graficul funcției nu are asimptotă orizontală la $\pm\infty$ $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1, n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = -1, y = x - 1$ asimptotă oblică la $+\infty$ Analog, $y = x - 1$ asimptotă oblică la $-\infty$	2p 1p 1p 1p
b)	$f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$ $f'(x) = 0$ implică $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$ Din tabelul de variație al funcției rezultă $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ este punct de maxim local și $x_2 = -2 + \sqrt{3}$ este punct de minim local	2p 1p 2p
c)	Se demonstrează prin inducție matematică că $a_n > 1, \forall n \geq 1$ Se deduce că sirul este descrescător $a_n > a_{n+1}$, funcția f strict crescătoare pe $(1, +\infty)$ implică $f(a_n) > f(a_{n+1})$ deci $a_{n+1} > a_{n+2}$ Sirul este mărginit $1 < a_n \leq 2, \forall n \geq 1$ Sirul este monoton și mărginit rezultă sir convergent, deci există $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. Trecând la limită în relația $a_{n+1} = f(a_n)$, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.	2p 2p 1p
2.a)	F primitiva lui f rezultă $F'(x) = \operatorname{arctg} x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. $F''(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deci funcția F este convexă pe \mathbb{R} .	2p 3p
b)	$G(x) = \int xf(x)dx = \int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx = x - \operatorname{arctg} x + C$ $G(x) = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) + C, G(1) = -\frac{1}{2}, \text{ deci } C = -\frac{\pi}{4}$.	2p 2p 1p
c)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x^2)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xf(x^2)}{4x^3} =$ $\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$.	3p 2p