Simulare - Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică M_tehnologic
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2 = a_1 + r$, deci $r = 2$, $a_3 = a_2 + r = 6 + 2 = 8$. Produsul primilor trei termeni ai progresiei este $a_1 a_2 a_3 = 4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$	**3p** **2p**
2.	$A(a-1, a+3) \in G_f \Leftrightarrow f(a-1) = a+3 \Leftrightarrow 3(a-1) - 2 = a+3$ $3a - 3 - 2 = a + 3 \Leftrightarrow 2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$	**3p** **2p**
3.	Condițiile de existență a logaritmilor $5x - 1 > 0$ și obținerea domeniului $D = \left(\frac{1}{5}, \infty\right)$ Ecuația devine: $\log_3(5x-1) = 2 \Leftrightarrow 5x - 1 = 9$. Rezolvarea ecuației $x = 2 \in D$	**1p** **2p** **2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele de doua cifre $\overline{ab}$ pentru care $a + b = 3, a \neq 0 \Rightarrow a = 1, b = 2$ sau $a = 2, b = 1$ sau $a = 3, b = 0$ $\Rightarrow$ numerele naturale de două cifre care au suma cifrelor egală cu trei sunt: 12, 21, 30 $\Rightarrow$ nr. cazurilor favorabile este 3 $p = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$	**1p** **2p** **2p**
5.	B este mijlocul segmentului $[AC]$, unde $C(x_C, y_C)$ este simetricul punctului A față de punctul B. $x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{-1 + x_C}{2} \Leftrightarrow x_C = 7$, $y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{4 + y_C}{2} \Leftrightarrow y_C = 0$ Finalizare $C(7,0)$	**2p** **2p** **1p**
6.	$cos^2 x = 1 - sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$ $cos x = \pm\frac{3}{5}, dar\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow cos x = \frac{3}{5}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, detA(0) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 = -1 - 8 = -9$	**5p**
b)	Matricea $A(x)$ este inversabilă $\Leftrightarrow det\ A(x) \neq 0$ $det\ A(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 4 & x-1 \end{vmatrix} = (x+1)(x-1) - 8 = x^2 - 9$ Ecuația $detA(x) = 0$ are soluțiile $x_1 = -3$ și $x_2 = 3$, Matricea $A(x)$ este inversabilă $\Leftrightarrow x \in R\backslash\{-3,3\}$	**1p** **3p** **1p**
c)	$A(x) \cdot A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 4 & x-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 4 & x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+1)^2 + 8 & 4x \\ 8x & (x-1)^2 + 8 \end{pmatrix}$ $A(x) \cdot A(x) = B \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + 8 = 8 \\ 4x = -4, 8x = -8 \\ (x-1)^2 + 8 = 12 \end{cases}$ Se obține $x = -1$ care verifică prima și ultima ecuație	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$-1 \circ 2 = -2 + 5 - 10 + 30 = 23$	**5p**

b)	Există element neutru $\Leftrightarrow [\exists e \in R \ a.\hat{\imath}\ x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in R]$	1p
	$x \circ e = xe - 5x - 5e + 30,\ e \circ x = ex - 5e - 5x + 30 \Rightarrow x \circ e = e \circ x, \forall x \in R$	1p
	$xe - 5x - 5e + 30 = x, \forall x \in R \Leftrightarrow (e-6)(x-5) = 0, \forall x \in R$	2p
	$e - 6 = 0 \Leftrightarrow e = 6 \in R$	1p
c)	$x \circ x \le 14 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 30 \le 14 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 \le 0$	1p
	Rezolvarea ecuației $x^2 - 10x + 16 = 0$ și obținerea soluțiilor $x_1 = 2$ și $x_2 = 8$.	1p
	Soluția inecuației este $x \in [2,8]$	1p
	Din $x \in Z \Rightarrow x \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$	2p

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{(x^2+4x+4)'(x+1)-(x^2+4x+4)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(2x+4)(x+1)-(x^2+4x+4)\cdot 1}{(x+1)^2} =$	2p
	$= \frac{2x^2+2x+4x+4-x^2-4x-4}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}, \forall x \in (-1,\infty)$	3p
b)	Căutăm asimptota oblică spre $+\infty$ de forma $y = mx + n$, unde	
	$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x+4}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1 \in R^*$	2p
	$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+4}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 3 \in R$	2p
	Dreapta de ecuație $y = x + 3$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	1p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in D, x = -2 \notin D, D = (-1,\infty)$	1p
	Tabelul de monotonie: x: -1 0 ∞ $f'(x)$: - - - - - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + + + + + + + + + $f(x)$: $\searrow$ 4 m $\nearrow$	2p
	Punctul de coordonate (0,4) este punct de minim absolut pentru graficul funcției f. Valoarea minimă a funcției este $4 \Rightarrow f(x) \ge 4, \forall x \in (-1,\infty)$	2p
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x) - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right\|_{-1}^{1} =$	3p
	$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.	2p
b)	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1\left(x^2 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^1 + \left. arctg x\right\|_0^1 = \frac{1}{3} + arctg1 - arctg0 = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}$	2p
	$\int_0^1 f(x)dx = \frac{n^2}{3} + \frac{\pi}{4} - 1 \Leftrightarrow \frac{n^2}{3} + \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow n^2 = 4 \Leftrightarrow n = \pm 2$.	2p
	Din n număr natural, obținem $n = 2$	1p
c)	Funcția F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in R$	1p
	$\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1} = F'(1) = f(1) =$	2p
	$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	2p