

Simulare Examenul Național de bacalaureat
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

20.12.2022

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

- 5p 1. Calculați modulul numărului complex $z = (2 + 3i)(2 - 3i) - (9 - 3i)$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: R \rightarrow R, f(x) = x^2 - 2x + m$, unde m este un număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $f(x) > 1$, pentru orice număr real x .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(\sqrt{x} + 1) + \log_5(\sqrt{x} - 1) = 2$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, acesta să aibă cifra zecilor egală cu 2 și cifra unităților egală cu 3.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $A(1,2)$, $B(4,5)$ și $D(-3,2)$. Determinați ecuația dreptei MN , știind că segmentul MN este linia mijlocie a trapezului $ABCD$.
- 5p 6. Știind că $x \in (\pi, 2\pi)$ și $\cos 2x = \frac{1}{3}$, calculați $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 2a - 5 & a - 2 \\ 1 & 2 - a & a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este un număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 3$.
- 5p b) Demonstrați că $\det(A(a)) = (a - 1)(a - 3)(3a + 1)$, pentru orice număr real a .
- 5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(3^x)) = 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă, cu element neutru, $x * y = \frac{1}{3}xy - \frac{1}{2}(x + y) + \frac{9}{4}$.
- 5p a) Demonstrați că $x * y = \frac{1}{3}(x - \frac{3}{2})(y - \frac{3}{2}) + \frac{3}{2}$ oricare ar fi numerele reale x și y .
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $x * x * x = x$.
- 5p c) Demonstrați că **nu** există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție $*$ să fie număr natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f: R \rightarrow R, f(x) = e^x(x^2 - 4x + 1)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = e^x(x - 3)(x + 1), \forall x \in R$.
- 5p b) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f , în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2022$.
- 5p c) Determinați valorile reale ale lui a , știind că graficul funcției f intersectează dreapta de ecuație $y=a$ în exact trei puncte.
2. Se consideră funcția $f: R \rightarrow R, f(x) = \cos x$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x) dx = \frac{1}{2}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.
- 5p c) Pentru fiecare număr natural n , se consideră numărul $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^n dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.