

Examenul de bacalaureat național 2023

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE simulare decembrie 2022

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

Subiectul I

(30 puncte)

1	$x - 1, x + 3, 4 - 2x$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice $\Rightarrow x + 3 = \frac{(x-1)+(4-2x)}{2}$ $2x + 6 = x - 1 + 4 - 2x \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$	2p 3p
2	$V(x_V, y_V) \in O_x \Leftrightarrow y_V = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (m + 1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (m + 1)^2 = 16$ $m_1 = 3, m_2 = -5$	2p 3p
3	$\sqrt{x + 2} = x, x \geq 0$ $x + 2 = x^2, x^2 - x - 2 = 0, x = -1, x = 2$ <i>Soluție</i> $x = 2$ care convine.	2p 3p
4	$P = \frac{\text{Nr. cazuri favorabile}}{\text{Nr. cazuri posibile}}$, Avem 900 numere de 3 cifre (cazuri posibile) Sunt $5^3 = 125$ numere de 3 cifre cu produsul cifrelor nr. impar. Avem $900 - 125 = 775$ numere de 3 cifre cu produsul cifrelor nr. par $P = \frac{\text{Nr. cazuri favorabile}}{\text{Nr. cazuri posibile}} = \frac{775}{900} = \frac{31}{36}$	2p 3p
5	$\overrightarrow{MN} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\overrightarrow{NP} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$. $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{i} - 5\vec{j} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$ $\overrightarrow{MP} = (m + 2)\vec{i} + (n - 1)\vec{j}$ deci $m + 2 = 6$ și $n - 1 = -2$	2p 3p

	$m = 4, n = -1$	
6	$tg^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}, ctg^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x},$ $(1 + ctg^2 x)\sin^2 x - (1 + tg^2 x)\cos^2 x = 0$ rezultă $\left(1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)\sin^2 x - \left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\cos^2 x = 0$ $\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}\right)\sin^2 x - \left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\cos^2 x = 0$ pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$	<p>3p</p> <p>2p</p>

Subiectul al II-lea

(30 puncte)

1a	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $det(A(0)) = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot (-1)$ $= 1$	<p>2p</p> <p>3p</p>
1b	$det(A(a)) = a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$ $det(A(0)) = 0 \Leftrightarrow a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$	<p>3p</p> <p>2p</p>
1c	<p>Sistemul are soluție unică $(x_0; y_0; z_0)$ pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ și soluția sistemului este</p> $\left(\frac{-3a+5}{(a+1)^2}; \frac{3a^2+5a-6}{(a+1)^2}; \frac{4}{a+1}\right)$ $4 \frac{x_0}{z_0} + y_0 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{-3a+5}{(a+1)^2} \cdot \frac{a+1}{4} + \frac{3a^2+5a-6}{(a+1)^2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{7}$	<p>3p</p> <p>2p</p>
2a	$x * y = 2xy + x + y + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ $= 2x\left(y + \frac{1}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$ pentru orice numere reale x și y .	<p>2p</p> <p>3p</p>
2b	$x * x = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ $x * x * x = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = 0$	<p>2p</p> <p>3p</p>

2c	$f(x * y) = \ln\left(\frac{x * y + \frac{1}{2}}{a}\right) = \ln\left(\frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right)}{a}\right)$	2p
	$f(x) + f(y) = \ln\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{a}\right) + \ln\left(\frac{y + \frac{1}{2}}{a}\right) = \ln\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right)}{a^2} \Leftrightarrow$ $\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right)}{a^2} = \frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right)}{a} \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$	3p

Subiectul al III-lea

30 puncte

1.a	$f'(x) = (e^x)' - (\ln(x+3))' =$	2p
	$= e^x - \frac{(x+3)'}{x+3} = e^x - \frac{1}{x+3}, x \in (-3, \infty).$	3p
1b	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$	2p
	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+3)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+3} = 0.$	2p
	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x}{x+2} - \frac{\ln(x+3)}{x+2} \right) = +\infty.$	1p
1c	$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+3)^2}, \quad x \in (-3, \infty).$	2p
	$f''(x) \geq 0, \text{ deci funcția } f \text{ este convexă pe } (-3, \infty).$	3p
2a	$\int_0^1 (f(x) - x) dx = \int_0^1 \frac{3}{x+1} dx = 3 \ln(x+1) \Big _0^1 =$	3p
	$= 3 \ln 2 - 3 \ln 1 = 3 \ln 2$	2p
2b	$\int_e^{e^2} \left(f(x) - \frac{3}{x+1} \right) \ln x dx = \int_e^{e^2} x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$	3p
	$= \frac{e^4}{2} \ln e^2 - \frac{e^2}{2} \ln e - \int_e^{e^2} \frac{x}{2} dx = e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big _e^{e^2} = \frac{3e^4 - e^2}{4}$	2p
2c	$F \text{ este primitivă a lui } f \text{ și } F(0)=0, \text{ deci } F: (-1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^2}{2} + 3 \ln(x+1)$	2p
	$\int_0^1 2f(x)F(x) dx = \int_0^1 2F'(x)F(x) dx = F^2(x) \Big _0^1 = \frac{1}{4} + \ln 8 + 9 \ln^2 2$	3p

Echipa de profesori:

Apostol Mihai (Liceul Teoretic "Horia Hulubei" Măgurele)
Prutescu Daniel (Liceul German "Hermann Oberth" Voluntari)
Hlevca Cristina (Liceul Teoretic "Ioan Petruș" Otopeni)
Cosmescu Ana-Maria (Școala Gimnazială Nr. 190 București)
Moraru Daniela – Inspector ISJ Ilfov