

1.

Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 8}{x + 1}$.

- a) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de pe grafic de abscisă $x = 0$.
- b) Determinați asimptotele verticale ale graficului funcției f .
- c) Arătați că f este concavă pe intervalul $(-\infty, -1)$.

2.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$.

- a) Determinați ecuația asimptotei graficului funcției f spre $+\infty$.
- b) Arătați că funcția f are exact două puncte de extrem.
- c) Arătați că $f(x) > -6$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

3.

Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3 \ln x - 1$.

- a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.
- b) Arătați că $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.
- c) Studiați derivabilitatea funcției $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ în punctul $x_0 = 1$.

4.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 \sqrt[3]{x} + 5 \sqrt[5]{x}$.

- a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt[3]{x}}$.
- b) Studiați derivabilitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.
- c) Arătați că $f'(x) > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

5.

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculați $\det A$.
- Verificați dacă $A^3 - 3A^2 + 2A = O_3$.
- Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $\det(A - xI_3) = 0$.

6.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + ae^x}{x-1}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

- Determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ a graficului funcției f .
- Determinați valoarea reală a lui a pentru care $f'(0) = -1$.
- Dacă $a = 0$, arătați că f este convexă pe intervalul $(1, \infty)$.

7.

Fie funcția $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \in (-1, 0] \\ x^3 + e^x - 1, & x \in (0, \infty) \end{cases}$.

- Arătați că f este funcție continuă în punctul $x_0 = 0$.
- Determinați asimptotele verticale ale graficului funcției f .
- Calculați $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x^2}$.

8.

Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

- Arătați că f este continuă în punctul $x_0 = 1$.
- Stabiliți dacă f este derivabilă în punctul $x_0 = 1$.
- Arătați că f este descrescătoare.

9.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$.

- a) Arătați că f este convexă pe $[0, \infty)$.
- b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$.
- c) Arătați că $f(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in [0, \infty)$.

10.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1, & x \in (-\infty, 0] \\ e^x + \ln(1+x), & x \in (0, \infty) \end{cases}$, unde a este un număr real.

- a) Determinați ecuația tangentei la graficul lui f în punctul de pe grafic de abscisă $x_0 = 1$.
- b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care f este derivabilă în punctul $x_1 = 0$.
- c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{3^x + e^x}$.

11.

Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln 3 - 3 \ln x$.

- a) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
- b) Determinați punctele de extrem ale funcției f .
- c) Arătați că $f(x) \geq 3 - 2x$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

12.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

- a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5}$.
- b) Determinați cel mai mare număr real strict pozitiv a cu proprietatea că f este descrescătoare pe intervalul $[-a, a]$.
- c) Arătați că pentru orice $m \in (0, 4)$, ecuația $f(x) = m$ are trei soluții distincte.

13.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax, & x \in (-\infty, 0) \\ x + \ln(1+x), & x \in [0, \infty) \end{cases}$.

- Arătați că f este continuă.
- Determinați mulțimea valorilor numărului real a pentru care f este crescătoare.
- Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - f(x+1))$.

14.

Fie funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$.

- Arătați că graficul funcției f nu are asimptote.
- Demonstrați că f este crescătoare.
- Arătați că există $c \in (9, 16)$ astfel încât $f(c) = 3$.

15.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$. $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

- Determinați asimptotele verticale ale graficului funcției f .
- Arătați că ecuația $f(x) = \frac{4}{5}$ nu are soluții.
- Demonstrați că $x - y \geq \ln \frac{x+1}{y+1}$, oricare ar fi x, y cu $x \geq y > 0$.

16.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$. $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

- Determinați asimptotele verticale ale graficului funcției f .
- Arătați că ecuația $f(x) = \frac{4}{5}$ nu are soluții.
- Demonstrați că $x - y \geq \ln \frac{x+1}{y+1}$, oricare ar fi x, y cu $x \geq y > 0$.

17.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 6e^x - x^3 - 3x^2$.

a) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$.

b) Arătați că f este funcție convexă.

c) Determinați numărul punctelor de extrem ale lui f .

18.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2}$.

a) Calculați limitele laterale ale lui f în punctul $x_0 = -2$.

b) Determinați ecuația asimptotei oblice a graficului funcției f spre $-\infty$.

c) Arătați că f este convexă pe $(-\infty, -2)$.

19.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{4x+1}{3x-2} + e^x$.

a) Calculați $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de pe grafic de abscisă $x_0 = 0$.

c) Să se arate că f este convexă pe intervalul $\left(\frac{2}{3}, \infty \right)$.

20.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + x + a, & x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$.

a) Determinați valorile lui a pentru care funcția f este continuă în $x_0 = 1$.

b) Studiați derivabilitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

21.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2+e^x}{1+e^x}$.

a) Determinați asimptotele orizontale ale graficului funcției f .

b) Arătați că funcția f este descrescătoare.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+e^x) f(x)}{x}$.

22.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x - \frac{1}{x}, & x \leq 1 \\ \frac{x}{x^2 - 1}, & x > 1 \end{cases}$.

a) Determinați asimptotele verticale ale graficului funcției f .

b) Arătați că f este convexă pe $(-\infty, 0)$.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \ln x$.

23.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$, unde a este un număr real.

a) Arătați că f este convexă pe intervalul $\left[\frac{1}{3}, \infty\right)$.

b) Determinați valorile lui a pentru care dreapta $y = 3x + 1$ este tangenta la graficul funcției f în punctul de pe grafic de abscisa 0.

c) Determinați mulțimea valorilor lui a pentru care f este crescătoare pe \mathbb{R} .

24.

Fie funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{3^x - 1}$.

a) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ a graficului funcției f .

b) Calculați limitele laterale ale funcției f în punctul $x_0 = 0$.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x)$.

25.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x + 3^x + 5^x - 10$.

a) Calculați $f'(0)$.

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$

să fie continuă în $x_0 = 1$.

c) Arătați că $2^{\sqrt{3}} + 3^{\sqrt{3}} + 5^{\sqrt{3}} \leq 38$.

26.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^5, & x \leq 0 \\ \frac{x}{\ln x}, & x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \end{cases}$.

a) Arătați că funcția f este continuă în punctul $x_0 = 0$.

b) Arătați că funcția f are derivate laterale în punctul $x_0 = 0$.

c) Determinați punctele de extrem ale funcției f .

27.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - \frac{1}{e^x} - 2x$.

a) Arătați că graficul funcției f nu are asimptote spre $+\infty$.

b) Demonstrați că f este funcție monotonă.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3}$.

28.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{9^x - 1}{3^x}$.

a) Arătați că funcția f nu are puncte de extrem.

b) Determinați numerele reale a și b astfel încât $\frac{f''(x)}{f(x)} = ax + b$,

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

29.

Fie a un număr real nenul și funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{0, a\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x(x - a)}$.

- Determinați asimptotele verticale ale graficului funcției f .
- Determinați numărul real nenul a știind că $x_0 = 1$ este punct de extrem al funcției f .
- Dacă $a \in (0, \infty)$ arătați că există $b \in (0, \infty)$ astfel încât f este strict descrescătoare pe intervalul (b, ∞) .

30.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x + 7}{x^2 + 3x + 2}$.

- Determinați numerele reale A și B pentru care $f(x) = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 1}$.
- Arătați că f este descrescătoare pe orice interval $I \subset \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$.
- Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 f'(x)$.

31.

Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + x \ln x$.

- Arătați că f este funcție convexă.
- Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de pe grafic de abscisă $x_0 = 1$.
- Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\ln x}$.

32.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x + x}{x^2 + 1}$.

- Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
- Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de pe grafic de abscisă $x_0 = 0$.
- Arătați că f este crescătoare pe intervalul $(-1, 1)$.

33.

Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 \ln x$.

a) Arătați că $xf'(x) - 3f(x) = x^3$, oricare ar fi $x > 0$.

b) Determinați punctele de extrem ale funcției f .

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f''(x)}{x^2}$.

34.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + x^3, & x \leq 0 \\ (x^2 + x)e^x, & x > 0 \end{cases}$.

a) Arătați că f are derivate laterale în punctul $x_0 = 0$.

b) Demonstrați că f este crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f''(x)}$.

35.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 4}$.

a) Determinați ecuația asimptotei graficului lui f spre $-\infty$.

b) Arătați că $2xf(x) + (x^2 + 4)f'(x) = 3x^2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\ln x}$.

36.

Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x + \ln x + 1$.

a) Determinați asimptotele verticale ale graficului funcției f .

b) Arătați că $f(x) \leq x^3$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x f'(x)}{f(x)}$.

37.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2e^x, & x \in (-\infty, 0] \\ \frac{2x+3}{x+1}, & x \in (0, \infty) \end{cases}$.

Arătați că funcția f este crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.

Demonstrați că $f(x) < f(y)$, oricare ar fi $x \in (-\infty, 0)$ și $y \in (0, \infty)$.

Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 f'(x)$.

38.

Fie funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + e^x}{x + e^x}$.

a) Determinați ecuația asimptotei orizontale a graficului funcției f .

b) Arătați că funcția f este crescătoare pe intervalul $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

c) Arătați că $(x + e^x)f(x) \geq x^2 + x + 1$, oricare ar fi $x \in [0, \infty)$.

39.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^4 + 3x^2 + 2}$.

a) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} x^5 f'(x)$.

b) Determinați punctele de extrem ale graficului funcției f .

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x f(x)$.

40.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \leq 0 \\ (x^2 + x + 1) \ln x, & x > 0 \end{cases}$.

a) Calculați limitele laterale ale lui f în punctul $x_0 = 0$.

b) Arătați că funcția f este crescătoare pe intervalul $[1, \infty)$.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3}$.