1.

Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție

$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + a}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Determinați numărul real a astfel încât $1*2 = 3$.

b) Pentru $a = -1$, arătați că $\mathbb{R}$ este grup în raport cu legea „*“.

c) Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x - a}$. Arătați că $f(x + y) = f(x)*f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

2.

Fie mulțimea $M = \mathbb{R} - \{-6\}$ şi legea „*“ definită pe $\mathbb{R}$ prin

$x * y = \frac{1}{3}xy + 2x + 2y + 6$.

a) Arătați că $x * y = \frac{1}{3}(x+6)(y+6) - 6$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că pentru orice $x, y \in M$ rezultă că $x * y \in M$.

c) Demonstrați că M este grup în raport cu legea „*“.

3.

Fie mulțimea $M = (0, \infty) \setminus \{1\}$ şi legea de compoziție „*“ definită pe $(0, \infty)$ prin $x * y = x^{\log_2 y}$.

a) Arătați că, dacă $x > 0, y > 0$ şi $x*y = 1$ atunci $x = 1$ sau $y = 1$.

b) Demonstrați că M este grup în raport cu legea „*“.

c) Arătați că funcția $f: M \to \mathbb{R}^*, f(x) = 2^x$ este izomorfism de la grupul $(M, *)$ la grupul $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

4.

Fie $M = (2, \infty)$ şi legea de compoziție „*“ definită pe $\mathbb{R}$ prin

$x*y = xy + ax - 2y + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinați valorile lui a şi b pentru care $1*3 = 3*1 = 1$.

b) Arătați că dacă M este grup în raport cu legea „*“, atunci $a = -2$ şi $b = 6$.

c) Pentru $a = -2$ şi $b = 6$ rezolvați ecuația $(x*x)*x = 3$, $x \in \mathbb{R}$.

5.

Pe mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = \frac{1}{5}xy + 3x + 3y + 30.$$

a) Aflaţi numărul raţional a pentru care $x*a = a$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

b) Daţi exemplu de două numere raţionale x şi y, care nu sunt numere întregi şi pentru care $x*y$ este număr întreg.

c) Arătaţi că funcţia $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, f(x) = 5x - 15$ are proprietatea

$f(xy) = f(x) * f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Q}$.

6.

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, unde $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ ori}}$.

a) Arătaţi că M are exact 4 elemente.

b) Dacă „ · " este operaţia de înmulţire a matricelor pătratice de ordinul 3 cu elemente reale, alcătuiţi tabla operaţiei „ · " pe M.

c) Arătaţi că M este grup în raport cu legea „ · ".

7.

Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie

$x * y = \sqrt{x^2y^2 + x^2 + y^2}$.

a) Demonstraţi că $(x*y)*z = x*(y*z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Arătaţi că $x * 0 = 0 * x = x$, $\forall x \in [0, \infty)$.

c) Arătaţi că dacă $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, atunci nu există $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * y = 0$.

8.

Fie mulţimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}^* \right\}$.

a) Stabiliţi dacă I_2 aparţine mulţimii G.

b) Arătaţi că $A(x) \cdot A(y) = A(2xy)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}^*$.

c) Arătaţi că $(G, \cdot)$ este grup în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor pătratice de ordinul 2.

9.

Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$ şi $M = \{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$,

unde $\sigma^n = \underbrace{\sigma\sigma\sigma\ldots\sigma}_{n \text{ ori}}$.

a) Calculaţi σ^{2012}.
b) Arătaţi că M este grup în raport cu operaţia de înmulţire a permutărilor.
c) Fie x o permutare din S_5 astfel încât $x\sigma \in M$. Arătaţi că $x \in M$.

10.

Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$ şi $M = \{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$,

unde $\sigma^n = \underbrace{\sigma\sigma\sigma\ldots\sigma}_{n \text{ ori}}$.

a) Calculaţi σ^{2012}.
b) Arătaţi că M este grup în raport cu operaţia de înmulţire a permutărilor.
c) Fie x o permutare din S_5 astfel încât $x\sigma \in M$. Arătaţi că $x \in M$.

11.

Pe intervalul $(\sqrt{3}, \infty)$ se defineşte legea $x * y = \sqrt{x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 12}$.

a) Arătaţi că $x * y = \sqrt{(x^2 - 3)(y^2 - 3) + 3}$, oricare ar fi $x \in (\sqrt{3}, \infty)$.

b) Demonstraţi că intervalul $(\sqrt{3}, \infty)$ este grup în raport cu legea „*“.

c) Rezolvaţi ecuaţia $x*x*x = 2$, $x \in (\sqrt{3}, \infty)$.

12.

Fie mulţimea $M = \{a + b\sqrt{7} \mid a^2 - 7b^2 = 1,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.
a) Verificaţi dacă $8 - 3\sqrt{7}$ aparţine mulţimii M.
b) Arătaţi că pentru orice $x, y \in M$ rezultă că $xy \in M$.
c) Demonstraţi că M este grup în raport cu operaţia de înmulţire a numerelor reale.

13.

Fie mulţimea $G = \left\{ A(k) = \begin{pmatrix} 3^k & 3^k - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Arătaţi că $A(k) \cdot A(p) = A(k+p)$ oricare ar fi numerele întregi k şi p.
b) Arătaţi că G este grup în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor pătratice de ordinul 3.

c) Determinaţi matricele $X \in G$ cu proprietatea că $X^4 = \begin{pmatrix} 81 & 80 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$.

14.

Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi mulţimea $G_f = \{T \in \mathbb{R} \mid f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$.

a) Arătaţi că dacă $T_1, T_2 \in G_f$ atunci $T_1 + T_2 \in G_f$.
b) Demonstraţi că G_f este grup abelian în raport cu operaţia de adunare a numerelor reale.
c) Determinaţi mulţimea G_f pentru funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + x + 1$.

15.

Fie mulţimea $M = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ şi legea de compoziţie „*" definită pe $\mathbb{R}$ prin $x*y = xy - 4x - 4y + a$, unde a este un număr real.
a) Determinaţi valoarea reală a lui a pentru care „*" este lege de compoziţie pe M.
b) Pentru $a = 20$ arătaţi că M este grup în raport cu legea „*".
c) Determinaţi valoarea reală a lui a pentru care funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 4$ are proprietatea $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

16.

Pe mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x*y = x + y + 4$ şi $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.
a) Arătaţi că $x \circ (y*z) = (x \circ y) * (x \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
b) Arătaţi că dacă $x \circ y = -4$ atunci $x = -4$ sau $y = -4$.
c) Rezolvaţi ecuaţia $(x \circ x) \circ x = (x*x) * x$, $x \in \mathbb{Z}$.

17.

Fie $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ inelul claselor de resturi modulo 8 şi $H = \{x^3 \mid x \in \mathbb{Z}_8\}$.

a) Rezolvaţi ecuaţia $\hat{2}x + \hat{5} = \hat{1},\ x \in \mathbb{Z}_8$.

b) Determinaţi suma elementelor mulţimii H.

c) Rezolvaţi ecuaţia $x^3 = \hat{3}$, $x \in \mathbb{Z}_8$.

18.

Fie $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ corpul claselor de resturi modulo 7.

a) Calculaţi produsul elementelor nenule ale corpului $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$.

b) Rezolvaţi ecuaţia $x^2 + \hat{3}x + \hat{3} = \hat{0},\ x \in \mathbb{Z}_7$.

c) Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7,\ f(x) = x^5 + \hat{4}x$ nu este injectivă.

19.

Fie mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$, unde $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ este corpul claselor de resturi modulo 5.

a) Arătaţi că, dacă $A, B \in M$, atunci $A \cdot B \in M$.

b) Fie $A \in M$ cu $\det(A) = \hat{0}$. Arătaţi că $A = 0_2$.

c) Rezolvaţi ecuaţia $X^2 = I_2, X \in M$.

20.

Fie mulţimea $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} \hat{1} + \hat{2}x & \hat{4}x \\ \hat{5}x & 1 + \hat{4}x \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{Z}_6 \right\}$, unde $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ este inelul claselor de resturi modulo 6.

a) Arătaţi că $A(x)\,A(y) = A(x + y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}_6$.

b) Arătaţi că M este grup în raport cu înmulţirea matricelor pătratice de ordinul 2.

c) Demonstraţi că $X^6 = I_2$, oricare ar fi $X \in M$.

21.

Fie polinomul $f = X^3 + 2X^2 - 3X + a$, unde a este un număr real şi x_1, x_2, x_3, rădăcinile sale.

a) Determinaţi valoarea lui a pentru care restul împărţirii lui f la $X + 2$ este 4.

b) Calculaţi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

c) Pentru $a = -6$ descompuneţi f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

22.

Fie polinomul $f = X^4 - 3X + 1$ şi x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile lui.

a) Determinaţi restul împărţirii lui f la $X + 1$.

b) Calculaţi $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{4}{9}\right)^{2-x}$.

c) Arătaţi că $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 - 4$.

23.

Fie polinomul $f = X^4 - 3X + 1$ şi x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile lui.

a) Determinaţi restul împărţirii lui f la $X + 1$.

b) Calculaţi $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{4}{9}\right)^{2-x}$.

c) Arătaţi că $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 - 4$.

24.

Fie polinomul $f = X^3 + 2X^2 - 5X + 1$ şi x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale.

a) Determinaţi restul împărţirii lui f la polinomul $X^2 + 1$.

b) Calculaţi $(1 - x_1)(1 - x_2)\,)(1 - x_3)$.

c) Calculaţi $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

25.

Fie polinomul $f = X^4 + 3X^3 - 3X + 1$ şi x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile sale.

a) Determinaţi numerele reale a pentru care $f(a) = f(-a)$.

b) Calculaţi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

c) Determinaţi rădăcinile lui f.

26.

Fie polinomul $f = X^4 + 2X^3 + 2X^2 - 2X - 3$.

a) Determinați câtul împărțirii lui f la $X^2 - 1$.

b) Descompuneți f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

c) Calculați $\frac{x_4}{x_1x_2x_3} + \frac{x_3}{x_1x_2x_4} + \frac{x_2}{x_1x_3x_4} + \frac{x_1}{x_2x_3x_4}$, unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile lui f.

27.

Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + aX + a - 4$ unde a este un număr real și x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale.

a) Determinați valorile reale ale lui a pentru care polinomul f se divide cu polinomul $X - 1$.

b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 11$.

c) Pentru $a = 1$ descompuneți polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

28.

Fie polinomul $f = X^4 + aX^3 + 5X^2 + bX + 1$ unde a și b sunt numere reale și x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile sale.

a) Determinați valorile reale ale lui a și b pentru care $f(x) = f(-x)$, oricare ar fi numărul real x.

b) Pentru $a = 3$ determinați valorile reale ale lui b pentru care f se divide cu polinomul $X - 1$.

c) Pentru $a = 0$ și $b = 1$ calculați $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4)$.

29.

Fie polinomul $f = X^3 + 4X^2 + 5X - 7$ și x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale.

a) Determinați câtul împărțirii lui f la polinomul $X + 3$.

b) Calculați $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

c) Calculați $x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2$.

30.

Fie polinomul $f = X^5 - 3X + 1$ și x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 rădăcinile sale.

a) Determinați restul împărțirii lui f la polinomul $X^2 - 1$.

b) Calculați $x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + x_5^6$.

c) Calculați $(4 - x_1^2)(4 - x_2^2)(4 - x_3^2)(4 - x_4^2)(4 - x_5^2)$.

31.

Fie polinomul $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{3}$ cu coeficienții în corpul $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$.

a) Calculați $f(\hat{1})$.

b) Determinați rădăcinile din $\mathbb{Z}_5$ ale lui f.

c) Descompuneți f în factori ireductibili în $\mathbb{Z}_5[X]$.

32.

Fie polinomul $f = X^4 + \hat{3}X^2 + X + a$ cu coeficienții în corpul $\mathbb{Z}_7$.

a) Determinați $a \in \mathbb{Z}_7$ astfel încât polinomul f să se dividă cu $X + \hat{6}$.

b) Pentru $a = \hat{2}$ determinați câtul împărțirii lui f la polinomul $X^2 + \hat{1}$.

c) Pentru $a = \hat{2}$ determinați rădăcinile lui f din $\mathbb{Z}_7$.

33.

Fie polinomul $f = X^4 + aX^3 - 10X^2 + aX + 24$, unde a este un număr real.

a) Determinați numărul real a pentru care $f(1) = f(-1)$.

b) Pentru $a = 0$ determinați rădăcinile lui f.

c) Arătați că pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$ restul împărțirii lui f la polinomul $X^2 - 1$ este un polinom de grad 1.

34.

Fie polinomul $f = X^3 + 2X^2 + aX + b$, unde a și b sunt numere reale.

a) Determinați valorile reale ale lui a și b pentru care f se divide cu $X^2 + X + 1$.

b) Pentru $a = 2$ și $b = 1$, descompuneți f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

c) Determinați valorile reale ale lui a pentru care $x_1(1 - x_1) + x_2(1 - x_2) + x_3(1 - x_3) = 2$.

35.

Fie polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + X + 1$ unde a și b sunt numere reale și x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile lui.

a) Dacă $a = b = 0$, determinați restul împărțirii lui f la $X + 2$.

b) Demonstrați că pentru orice $p, q \in \mathbb{R}, p \neq q$, câturile împărțirii lui f la $X - p$ și $X - q$ nu sunt egale.

c) Pentru $a = 0$ și $b = 1$, calculați $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$.

36.

Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + X + \hat{2}$ cu coeficienți în corpul $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$.

a) Determinați $a \in \mathbb{Z}_3$ știind că f are rădăcina $\hat{2}$.

b) Determinați $a \in \mathbb{Z}_3$ știind că f este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

c) Arătați că pentru orice $a \in \mathbb{Z}_3$, polinomul f are cel mult o rădăcină în $\mathbb{Z}_3$.

37.

Fie polinomul $f = X^4 + aX^3 + aX + 1$, unde a este un număr real și x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile lui.

a) Determinați valorile lui a pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$.

b) Calculați $\dfrac{x_1^2 - 1}{x_1} + \dfrac{x_2^2 - 1}{x_2} + \dfrac{x_3^3 - 1}{x_1} + \dfrac{x_4^2 - 1}{x_1}$.

c) Calculați $(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3)(1 - 2x_4)$.

38.

Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} a + \hat{2}b & b \\ b & a - \hat{2}b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$, unde $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ este corpul claselor de resturi modulo 5.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii G.

b) Arătați că $AB \in G$, oricare ar fi $A, B \in G$.

c) Arătați că dacă $A \in G$, atunci $\det(A) \neq \hat{2}$.

39.

Fie polinomul $f = X^3 + \hat{2}X + \hat{1}$ cu coeficienți în corpul $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$.

a) Arătați că f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$.

b) Determinați câtul împărțirii lui f la $X + \hat{2}$.

c) Determinați toate polinoamele $g \in \mathbb{Z}_3[X]$, de gradul 3 cu proprietatea

că $g(a) = f(a)$ oricare ar fi a în $\mathbb{Z}$.

40.

Fie polinomul $f = X^4 - 3X^2 + X + 1$ și x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile lui.

a) Calculați $f(-2) \cdot f(-1) \cdot f(0) \cdot f(1) \cdot f(2)$.

b) Calculați $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

c) Arătați că $f(x_1 + x_2 + x_3) + f(x_1 + x_2 + x_4) + f(x_1 + x_3 + x_4) + f(x_2 + x_3 + x_4) = 0$.