Testul 9

Subiectul I

1. Avem $x = 3$ şi $2x + y = 0$, deci $y = -6$. **(5 p.)**

2. Ecuaţia primei bisectoare este $y = x \Rightarrow$ intersecţia este dată de ecuaţia $f(x) = x \Rightarrow 2x^2 - 2x + 1 = 0$. Cum $\Delta = 4 - 8 < 0$, rezultă cerinţa. **(5 p.)**

3. $2\log_3 2 = \log_3 4$, deci $3x - 1 = 4 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$. **(5 p.)**

4. Sunt $2^3 = 8$ funcţii. **(5 p.)**

5. Fie $C(x, y)$ punctul cerut. Cum B este mijlocul lui AC, avem $\frac{x+1}{2} = 2$, $y = \frac{y+2}{2} = -1$, deci $x = 3$, $y = -4$. **(5 p.)**

6. $\frac{BC}{\sin A} = 2R$, deci $\sin A = \frac{5}{8}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. ***a)*** $2A + I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, deci $\det(2A + I_2) = -11$. **(5 p.)**

b) Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_2$, de unde $A^4 = 9I_2$ şi $A^4 - 3A^2 = 9I_2 - 9I_2 = 0_2$. **(5 p.)**

c) Deoarece $\det A = -3$ şi $A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, obţinem $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. **(5 p.)**

2. ***a)*** $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ şi $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = e$. Cum $2012 = 3k + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sigma^{2012} = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. **(5 p.)**

b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $n = 3c + r$ cu $c, r \in \mathbb{N}$, $0 \le r \le 2$. Atunci $\sigma^n = \sigma^{3c+r} = (\sigma^3)^c \cdot \sigma^r = \sigma^r$, deci $M = \{e, \sigma, \sigma^2\}$.

Tabla înmulţirii permutărilor pe M este

	e	σ	σ^2
e	e	σ	σ^2
σ	σ	σ^2	e
σ^2	σ^2	e	σ

, deci înmulţirea permutărilor este lege pe M. Cum mulţimea permutărilor este asociativă, $x \in M$, $\sigma^{-1} = \sigma^2$ şi $(\sigma^2)^{-1} = \sigma$ rezultă că $(M, \cdot)$ este grup. **(5 p.)**

c) Dacă $x\sigma = e \Rightarrow x = \sigma^{-1} = \sigma^2 \in M$. Dacă $x\sigma = \sigma \Rightarrow x = e \in M$, iar dacă $x\sigma = \sigma^2 \Rightarrow x = \sigma \in M$. **(5 p.)**

Subiectul III

1. ***a)*** $f'(x) = e^x - 1 - x$ şi $f''(x) = e^x - 1 \ge 0$, $\forall x \in [0, \infty)$. Deci f este convexă pe $[0, \infty)$. **(5 p.)**

b) Din teorema lui l'Hospital avem: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{6x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}$. **(5 p.)**

c) Tabloul de variație a lui f este:

x	0	0	∞
$f''(x)$	$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$	$0\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$	
$f'(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$
$f(x)$	$+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$	$0\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$	
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Cum f este crescătoare pe $\mathbb{R}$ și $f(0) = 0$ rezultă că $f(x) = 0$, $\forall x \in [0, \infty)$. **(5 p.)**

2.*a)* $f(x)=\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2(x+2)}=\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}\geq 0$ pentru $x \in [1, 2]$. Rezultă că $A=\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=$

$=\dfrac{1}{2}\ln x\Big|_1^2-\ln(x+1)\Big|_1^2+\dfrac{1}{2}\ln(x+2)\Big|_1^2=\dfrac{1}{2}\ln 2-\ln\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{32}{27}$. **(5 p.)**

b) $\displaystyle\int_1^2 (x^2+2x)\,f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{x^2+2x}{(x^2+2x)(x+1)}\,\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=\ln(x+1)\Big|_1^2=\ln\frac{3}{2}$. **(5 p.)**

c) $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln t\Big|_1^x-\ln(t+1)\Big|_1^x+\frac{1}{2}\ln(t+2)\Big|_1^x=\frac{1}{2}\ln x-\ln\frac{x+1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{x+2}{3}=\frac{1}{2}\ln x-\ln\frac{x+1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{x+2}{3}=$

$\displaystyle=\ln\sqrt{\frac{x^2+2x}{3}}-\ln\frac{x+1}{2}=\ln\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}=\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$. **(5 p.)**