# Testul 8

## Subiectul I

**1.** $3+2\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$, $3-2\sqrt{2}=\left(1-\sqrt{2}\right)^2$, deci $\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}+1-\left(\sqrt{2}-1\right)=2\in\mathbb{N}$. **(5 p.)**

**2.** $f(0)=3$, deci $(0, 3)$ este punctul de intersecție cu $Oy$, $f(x)=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$, deci $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ este punctul de intersecție cu $Ox$. **(5 p.)**

**3.** Avem $|x|=2^2=4$, de unde $x=4$ sau $x=-4$. **(5 p.)**

**4.** Numerele sunt permutări ale tripletelor 1, 2, 4 și 2, 3, 4 sunt $3!+3!=6+6=12$ numere. **(5 p.)**

**5.** Este necesar ca pantele dreptelor $AB$ și $AC$ să fie egale: $\dfrac{m-1}{1-(-1)}=\dfrac{0-1}{4-(-1)}\Rightarrow\dfrac{m-1}{2}=\dfrac{-1}{5}\Rightarrow$

$\Rightarrow 5m-5=-2$, deci $m=\dfrac{3}{5}$. **(5 p.)**

**6.** Deoarece $5^2+12^2=13^2$, triunghiul este dreptunghic, iar ipotenuza $BC$ este diametrul cercului circumscris. Rezultă $R=\dfrac{13}{2}$. **(5 p.)**

## Subiectul II

**1.** *a)* Avem $\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=-1$. **(5 p.)**

*b)* $\Delta_x=\begin{vmatrix}a+2 & -1 & 1\\ a+1 & -2 & 2\\ a & -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+2 & -1 & 0\\ a+1 & -2 & 0\\ a & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+2 & -1\\ a+1 & -2\end{vmatrix}=-a-3$, deci $x=a+3$.

$\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & a+2 & 1\\ 3 & a+1 & 2\\ 1 & a & 2\end{vmatrix}=-2a-5\Rightarrow y=2a+5$ și $z=a+2-2x+y=a+1$.

Avem $(x, y, z)=(a+3, 2a+5, a+1)$. **(5 p.)**

*c)* Din $(a+3)^2+(2a+5)^2+(a+1)^2=6a^2+28a+35$ rezultă $6a^2+28a+35=3\Rightarrow 3a^2+14a+16=0$.

Avem $\Delta=4$ și $a_1=-2\in\mathbb{Z}$, $a_2=\dfrac{-18}{3}\in\mathbb{Z}$. Rezultă $a=-2$. **(5 p.)**

**2.** *a)* $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & -x\\ -x & x\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=1$ și $x=0$ fals, deci $I_2\notin G$. **(5 p.)**

*b)* Fie $x, y\in\mathbb{R}^*$; $A(x)\,A(y)=\begin{pmatrix}x & -x\\ -x & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & -y\\ -y & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2xy & -2xy\\ -2xy & 2xy\end{pmatrix}=A(2xy)$. **(5 p.)**

*c)* Cum $2xy\neq 0$, $\forall x, y\neq 0$, rezultă din *b)* că înmulțirea matricelor este operație (asociativă) pe mulțimea $G$. Cum $A(x)\cdot A\left(\dfrac{1}{2}\right)=A\left(\dfrac{1}{2}\right)A(x)=A(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$ rezultă că $A\left(\dfrac{1}{2}\right)$ este element neutru.

Deoarece pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$, $A(x)\cdot A\left(\dfrac{1}{4x}\right)=A\left(\dfrac{1}{4x}\right)A(x)=A\left(\dfrac{1}{2}\right)$ rezultă că toate matricele din $G$ sunt simetrizabile. **(5 p.)**

**Subiectul III**

**1.** ***a)*** Din teorema lui l'Hospital, $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x}=1=f(1)$, deci $f$ este continuă în $x_0=1$. **(5 p.)**

***b)*** $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{2x(x-1)}=-\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{2x}=-\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$,

deci $f$ este derivabilă în $x_0=1$ și $f'(x)=-\frac{1}{2}$. **(5 p.)**

***c)*** $f'(x)=\frac{\frac{x-1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$ pentru $x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$.

Fie $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x-1}{x}-\ln x$. Atunci $g'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}$ și tabloul de variație a lui $g$ este:

| $x$ | 0 | 1 | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | + + + + + + + | 0 | – – – – – – – – – |
| $g(x)$ | $\nearrow$ | 0 | $\searrow$ |

Cum 1 este punctul de maxim global al lui $g$ rezultă că $g(x)\le g(1)=0$, $\forall x\in(0,\infty)$. Rezultă că $f'(x)\le 0$, $\forall x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$ și $f'(1)=-\frac{1}{2}<0$, deci $f$ este descrescătoare. **(5 p.)**

**2.** ***a)*** $f(1)=\int_0^1\frac{t}{t+1}\,dt=\int_0^1\frac{t+1-1}{t+1}\,dt=\int_0^1\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=1-\ln(t+1)\Big|_0^1=1-\ln 2$. **(5 p.)**

***b)*** $f(x+1)+f(x)=\int_0^1\frac{t^{x+1}+t^x}{t+1}\,dt=\int_0^1\frac{t^x(t+1)}{t+1}\,dt=\int_0^1 t^x\,dt=\frac{t^{x+1}}{x+1}\Big|_0^1=\frac{1}{x+1}$. **(5 p.)**

***c)*** Cum $t^{x+1}\le t^x$, $\forall t\in[0,1]\Rightarrow\frac{t^{x+1}}{x+1}\le\frac{t^x}{t+1}$. Rezultă că $2f(x+1)\le f(x+1)+f(x)\le 2f(x)$ deci $f(x+1)\le\frac{1}{2(x+1)}\le f(x)$. Din prima inegalitate rezultă că $f(x)\le\frac{1}{2x}$, $\forall x>1$, deci $\frac{1}{2(x+1)}\le f(x)\le\frac{1}{2x}$, $\forall x>1$. **(5 p.)**