Testul 7

Subiectul I

1. Rația progresiei (aritmetice) este 3 și al zecelea termen este $1 + 3 \cdot 9 = 28$. Suma este $\frac{1+28}{2} \cdot 10 =$

$= 29 \cdot 5 = 145$. **(5 p.)**

2. Avem $x^2 - 3xy + 3y^2 = \left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = \left(x - \frac{3y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2 \geq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. **(5 p.)**

3. Scriem $2^{x+1} = 2^x \cdot 2$, deci $3 \cdot 2^x = 24 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$. **(5 p.)**

4. Sunt $3! = 6$ funcții inversabile. **(5 p.)**

5. $x_G = \frac{-1+0+3}{3} = \frac{2}{3}$; $y_G = \frac{1+2+0}{3} = 1$. **(5 p.)**

6. $\cos 20° = -\cos 160°$; $\cos 40° = -\cos 140°$. Suma este 0. **(5 p.)**

Subiectul II

1.*a)* $2A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ și $\det(2A) = 4$. Cum $\det A = 1$, rezultă $\det(2A) - 2\det A = 4 - 2 = 2$. **(5 p.)**

b) Avem $A^{-1} = A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. **(5 p.)**

c) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$, $A^3 = -A$ și $A^4 = I_2$, deci $A + A^2 + A^3 + A^4 = 0_2$. Atunci $A + A^2 + \ldots + A^{100} =$
$= (A + A^2 + A^3 + A^4)(I_2 + A^5 + \ldots + A^{96}) = 0_2$. **(5 p.)**

2.*a)* $x * y = \sqrt{(x^2+1)(y^2+1) - 1}$ și $(x * y) * z = \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)-1} * z = \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) - 1}$,
iar $x * (y * z) = x * \sqrt{(y^2+1)(z^2+1) - 1} = \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) - 1}$. **(5 p.)**

b) $x * 0 = \sqrt{x^2} = |x| = x$, $\forall x \in [0, \infty)$. **(5 p.)**

c) Fie $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Atunci $x * y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2y^2 + x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2y^2 + x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$, fals. **(5 p.)**

Subiectul III

1.*a)* $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} \ln(1+x) = 0$; $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} (x^3 + e^x - 1) = 0$ și $f(0) = 0$, deci f este continuă în 0. **(5 p.)**

b) $\lim\limits_{x > -1} f(x) = \lim\limits_{x > -1} \ln(1+x) = -\infty$, deci dreapta $x = -1$ este asimptotă verticală. Cum f este continuă pe $(-1, \infty)$, nu există alte asimptote verticale. **(5 p.)**

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^3 + e^x - 1}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(x + \frac{e^x - 1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x}{2x} = \infty$. **(5 p.)**

2.*a)* $\int_0^1 \left(f(x) + \frac{x}{x^2+x+1}\right) dx = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \int_0^1 \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} dx = \ln(x^2+x+1)\Big|_0^1 = \ln 3$. **(5 p.)**

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{F(x)}{\ln x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{F'(x)}{(\ln x)'} = \lim\limits_{x \to \infty} x f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} = 1$. **(5 p.)**

c) $\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{x+1}{(x+1)^2 - x} dx \geq \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2$. **(5 p.)**