Testul 6

Subiectul I

1. Numărul este egal cu $7+\sqrt{50}$. Cum $7<\sqrt{50}<8$, rezultă $14<7+\sqrt{50}<15$. Partea întreagă este 14. **(5 p.)**

2. Avem $1 = 2x^2 + 3x + 1, x \in \mathbb{R} - \{-1\}$. Obținem $x(2x + 3) = 0$, cu soluțiile $x_1 = 0$ și $x_2 = -3/2$. **(5 p.)**

3. Avem $\frac{\ln 3}{\ln 2}\frac{\ln 4}{\ln 3}\ldots\frac{\ln 8}{\ln 7}=\frac{\ln 8}{\ln 2}=\frac{3\ln 2}{\ln 2}=3$. **(5 p.)**

4. Sunt $2^4 = 16$ submulțimi ale lui A. Convin $\{1, 4\}$ și $\{2, 3\}$. Probabilitatea este $\frac{1}{8}$. **(5 p.)**

5. Cum $\vec{u}+\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$, lungimea este $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$. **(5 p.)**

6. Avem $p=\frac{5+7+9}{2}=\frac{21}{2}$ și $S=\sqrt{\frac{21}{2}\cdot\frac{11}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{2}}=\frac{21\sqrt{11}}{4}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1.*a)* Determinantul este $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ a & 1 & -1\end{vmatrix}=0$. **(5 p.)**

b) Din prima și a treia ecuație rezultă $x + y - z = 1 = 3$, deci sistemul nu are soluții. **(5 p.)**

c) Adunând primele două relații obținem $x = 1$, apoi $y=z=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$, care verifică și ultima ecuație. Obținem soluțiile $(1, \lambda, \lambda)$, cu $\lambda\in\mathbb{R}$. **(5 p.)**

2.*a)* $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A^4 = I_3$. Fie $n\in\mathbb{N}^*$, $n=4k+r$, cu $0\le r\le 3$. Atunci $A^n=A^{4k+r}=(A^4)^k\cdot A^r=A^r$, deci $M = \{I_4, A, A^2, A^3\}$. M are 4 elemente. **(5 p.)**

b)
$$\begin{array}{c|cccc} & I_3 & A & A^2 & A^3\\ \hline I_3 & I_3 & A & A^2 & A^3\\ A & A & A^2 & A^3 & I_3\\ A^2 & A^2 & A^3 & I_3 & A\\ A^3 & A^3 & I_3 & A & A^2\end{array}$$
(5 p.)

c) Cum înmulțirea matricelor este lege pe M, este asociativă, $I_4\in M$ este element neutru $I_4^{-1}=I_4$, $A^{-1}=A^3$, $(A^2)^{-1}=A^2$, $(A^3)^{-1}=A$, rezultă ca $(M,\cdot)$ este grup. **(5 p.)**

Subiectul III

1.*a)* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty \Rightarrow$ nu există o asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f; $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ și $n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+ae^x}{x-1}=2$, deci ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ este $y = x + 2$. **(5 p.)**

b) $f'(x)=\frac{(2x+1+ae^x)(x-1)-(x^2+x+ae^x)}{(x-1)^2}$, $x\neq 1$. Atunci $f'(0) = 1 \Leftrightarrow -1 - a - a = -1 \Leftrightarrow a = 0$. **(5 p.)**

c) $f(x)=\frac{x^2+x}{x-1}=\frac{x(x-1)+2(x-1)+2}{x-1}=x+2+\frac{2}{x-1}$, deci $f'(x)=1-\frac{2}{(x-1)^2}$ și $f''(x)=\frac{4}{(x-1)^3}$. Cum $f''(x) > 0$, $\forall x\in(1,\infty)\Rightarrow f$ este convexă pe $(1, \infty)$. **(5 p.)**

2.*a)* Cu substituția $x^2 + 1 = t$, avem $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2+1)'\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_1^2=\frac{1}{3}(\sqrt{8}-1)=$ $=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. **(5 p.)**

b) $V=\pi\int_1^2 g^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_1^2 (x^2+1)\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_1^2=\pi\left(\frac{7}{3}+1\right)=\frac{10\pi}{3}$. **(5 p.)**

c) $\int_0^1 x^{2012}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{2013}\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x\geq\sqrt{2}\int_0^1 x^{2013}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_0^1 x^{\frac{4027}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{2}}{4029}$. **(5 p.)**