Testul 5

Subiectul I

1. Este necesar ca $1 - x^2 = 0$, deci $x \in [-1, 1]$. **(5 p.)**

2. Avem $x_V = -\dfrac{2}{2} = -1$, deci axa de simetrie are ecuația $x = -1$. **(5 p.)**

3. Avem $2^{-(x+1)} = 2^2 \Rightarrow -x - 1 = 2 \Rightarrow x = -3$. **(5 p.)**

4. Sunt $C_5^2 = 10$ submulțimi. **(5 p.)**

5. Avem $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + 2\,\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA}) + (DB + \overrightarrow{BC}) - 2\,\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. **(5 p.)**

6. $BC^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 16 + 25 - 20\sqrt{3} = 41 - 20\sqrt{3}$. Perimetrul este $9 + \sqrt{41 - 20\sqrt{3}}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1.*a)* $\det A = 0$. **(5 p.)**

b) Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ și $A^3 - 3A^2 + 2A = O_3$. **(5 p.)**

c) Avem $\det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ -1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3 - (1-x) = (1-x)\,[(1-x)^2 - 1] = (1-x)(x^2 - 2x) =$

$= x(1-x)(x-2)$. Ecuația are soluțiile $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. **(5 p.)**

2.*a)* $x * a = a \Leftrightarrow \dfrac{1}{5}xa + 3x + 3a + 30 = a \Leftrightarrow xa + 15x + 10a + 150 = 0 \Leftrightarrow x(a + 15) + 10(a + 15) = 0$,

$\forall x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow a = -15$. **(5 p.)**

b) $x * y = \dfrac{1}{5}(xy + 15x + 15y) + 30 = \dfrac{1}{5}(x+15)(y+15) - 15$. Fie $x = \dfrac{a}{b}$ și $y = \dfrac{c}{d}$ cu a, b, c și d numere întregi. Avem $x*y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{a}{b} + 15\right)\left(\dfrac{c}{d} + 15\right) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{a + 15b}{b} \cdot \dfrac{c + 15d}{d} \in \mathbb{Z}$. Alegem $b = 2$, $d = 3$, $a + 15b = 5d$ și $c + 15d = b$, deci $a = -15$, $b = 2$, $c = -43$, $d = 3$. Un exemplu este $x = -\dfrac{15}{2}$, $y = -\dfrac{43}{3}$, cu $x*y = 1$. **(5 p.)**

c) $f(x) * f(y) = \dfrac{1}{5}(f(x) + 15)(f(y) + 15) - 15 = \dfrac{1}{5} \cdot 5x \cdot 5y - 15 = 5xy - 15 = f(xy)$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$. **(5 p.)**

Subiectul III

1.*a)* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, deci dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$. **(5 p.)**

b) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2 - 2x^2 - 3x}{(x^2 + 3x + 2)^2} = \dfrac{2 - x^2}{(x^2 + 3x + 2)^2}$. Tabloul de variație al funcției f este:

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$-\infty$
$f(x)$	− − − − − − −		− 0 +		+ + + 0 − − −	
$f(x)$	↘		↘ ↗		↗ ↘	

Din tabel rezultă $a = \sqrt{2}$. **(5 p.)**

c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3x+2}=\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}$, deci $f'(x)=-\dfrac{2}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ şi $f''(x)=\dfrac{4}{(x+2)^3}-\dfrac{2}{(x+1)^3}$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{(x+2)^3}=\dfrac{1}{(x+1)^3} \Leftrightarrow \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^3=2 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x+1}=\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{2-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}$. **(5 p.)**

2.*a)* $\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e \ln x\,dx=\int_1^e x'\ln x\,dx= x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e dx=e-e+1=1$. **(5 p.)**

b) Fie F o primitivă a lui f. Atunci $F(x)=\begin{cases} e^x-ex+c_1, & x\le 1\\ x\ln x-x+c_2, & x>1\end{cases}$. Cum F e continuă în 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\nearrow 1}F(x)=\lim\limits_{x\searrow 1}F(x) \Rightarrow c_1=-1+c_2$, deci $F(x)=\begin{cases} e^x-ex+c, & x\le 1\\ x\ln x-x+1+c, & x>1\end{cases}$. Cum $F(0)=1+c=1$

rezultă $c=0$, deci $F(x)=\begin{cases} e^x-ex, & x\le 1\\ x\ln x-x+1, & x>1\end{cases}$. **(5 p.)**

c) Cum $f(x)\le 0$ pentru $x\in[0,1]$ şi $f(x)=0$ pentru $x\in[1,e]$, rezultă că $A=\int_0^e |f(x)|\,dx=\int_0^e(-f(x))\,dx+$

$+\int_1^e f(x)\,dx\overset{a)}{=}(ex-e^x)\Big|_0^1+1=1+1=2$. **(5 p.)**