Testul 40

Subiectul I

1. Avem $2 = 5^y = (2^x)^y = 2^{xy}$, deci $xy = 1$. **(5 p.)**

2. Din $A(0,-1)$ şi $B(1,0)$ rezultă $AB = \sqrt{2}$. **(5 p.)**

3. Avem $2^{-x} = 2^{-2}$, de unde $x = 2$. **(5 p.)**

4. Numerele sunt $\overline{ab}$, cu $a \in \{2,4,6,8\}$ şi $b \in \{2,4,6,8\}$; sunt $4 \cdot 4 = 16$ numere. **(5 p.)**

5. Din $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = -\vec{i} - 5\vec{j}$ obţinem $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 12\vec{j}$, deci $M(-1,12)$. **(5 p.)**

6. Avem $(3+\sqrt{3})^2 + (3-\sqrt{3})^2 = 2(9+3) = 24 = (2\sqrt{6})^2$, deci $A = 90°$. **(5 p.)**

Subiectul II

1.*a)* $\det M(2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$. **(5 p.)**

b) $M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M^2(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$. **(5 p.)**

c) Observăm că $M^2(x) = I_3$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă cerinţa. **(5 p.)**

2.*a)* Cum $f(1) = 0$, rezultă că produsul cerut este 0. **(5 p.)**

b) Din prima relaţie a lui Viète rezultă că $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. **(5 p.)**

c) Suma din enunţ este $A = f(-x_1) + f(-x_2) + f(-x_3) + f(-x_4)$.

Cum $f(-x_i) = x_i^4 - 3x_i^2 - x_i + 1 = x_i^4 - 3x_i^2 + x_i + 1 - 2x_i = -2x_i$ pentru orice $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Atunci $A = -2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0$. **(5 p.)**

Subiectul III

1.*a)* $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 1$ şi $\lim\limits_{x \searrow 0}(x^2 + x + 1)\ln x = -\infty$. **(5 p.)**

b) $f'(x) = (2x+1)\ln x + \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$, $\forall x \in (0,\infty)$. Cum $\ln x = 0$, $\forall x \in [1,\infty)$, rezultă că $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [1,\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1,\infty)$. **(5 p.)**

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2} \cdot \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. **(5 p.)**

2.*a)* $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^4 + x^2 - (x^2+1) + x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2 - 1 + \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$

$\displaystyle= \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\ln t\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{2}{3}$. **(5 p.)**

b) Fie F o primitivă a lui f. Atunci $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(0)$ şi $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{F(x) - F(0)}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{F'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{3x^2} =$

$\displaystyle= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x - 1}{3x^4 + 3x^2} = \frac{1}{3}$. **(5 p.)**

c) Deoarece $\left(\frac{f'}{f}\right)'(x)=\frac{f''(x)f(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}$, rezultă că integrala din enunţ este egală cu $\int_0^1\left(\frac{f'}{f}\right)'(x)\,dx=$ $=\left(\frac{f'}{f}\right)(x)\Big|_0^1=\frac{f'(1)}{f(1)}-\frac{f'(0)}{f(0)}$. Cum $f'(x)=\frac{(4x^3+1)(x^2+1)-(x^4+x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$, rezultă că $f'(1)=\frac{10-2}{4}=2$ şi $f'(0)=1$. Cum $f(0)=-1$ şi $f(1)=\frac{1}{2}$, integrala din enunţ este egală cu $4+1=5$. **(5 p.)**