Testul 4

Subiectul I

1. Avem $x(x-4) \le 0$, deci $x \in [0, 4] \cap \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. **(5 p.)**

2. Ecuația $f(x) = 0$ are rădăcinile $x = 2$ și $x = 4$. Punctele sunt $A(2, 0)$ și $B(4, 0)$. **(5 p.)**

3. $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$, deci $\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$. Avem condiția $x > 0$, care este verificată. **(5 p.)**

4. $C_{10}^2 = C_{10}^8 = \dfrac{10 \cdot 9}{2}$, $A_{10}^2 = 10 \cdot 9$, de unde $\dfrac{C_{10}^2 + C_{10}^8}{A_{10}^2} = 1$. **(5 p.)**

5. Pentru $x = 2$ avem $y = \dfrac{2x+5}{3} = \dfrac{9}{3} = 3$. Punctul este $(2, 3)$. **(5 p.)**

6. Triunghiul este isoscel și $B = C = 75°$. Atunci $A = 30°$ și aria este $\dfrac{4 \cdot 4 \sin 30°}{2} = 4$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. ***a)*** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci $A^2 - 2A + I_2 = O_2$. **(5 p.)**

b) Fie $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Avem $B^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d+bc \end{pmatrix}$. Deci $a^2 + bc = d^2 + bc = 1$, $b(a+d) = -2$, $c(a+d) = 0$. Rezultă $c = 0$, $a^2 = d^2 = 1$, $a + d \neq 0$. Din $(a-d)(a+d) = 0$ rezultă $a = d$. Obținem $a = d = 1$, $b = -1$ sau $a = d = -1$, $b = 1$, adică $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. **(5 p.)**

c) Avem $A - x I_2 = \begin{pmatrix} 1-x & -2 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix}$, $\det(A - xI_2) = (1-x)^2$, adică $x = 1$.

Atunci $\det(A^2 - 1 \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. **(5 p.)**

2. ***a)*** $1*3 = 3*1 = 1 \Leftrightarrow 3 + a - 6 + b = 1$ și $3 + 3a - 2 + b = 1 \Leftrightarrow a + b = 4$ și $3a + b = 0 \Leftrightarrow a = -2$ și $b = 6$. **(5 p.)**

b) Dacă M este grup în raport cu legea „$*$“, atunci legea „$*$“ are element neutru, deci există $e \in M$ cu $x*e = e*x = x$, $\forall x \in M \Leftrightarrow xe + ax - 2e + b = x$ și $ex + ae - 2x + b = x$, $\forall x \in M \Leftrightarrow x(e + a - 1) - 2e + b = 0$ și $x(e-3) + ae + b = 0 \Leftrightarrow e = 3$, $a + 2$, $-6 + b = 0 \Leftrightarrow a = -2$ și $b = 6$. **(5 p.)**

c) $x*y = xy - 2x - 2y + 6 = (x-2)(y-2) + 2$, deci $(x*x)*x = ((x-2)^2 + 2)*x = (x-2)^3 + 2$.
Ecuația este echivalentă cu $(x-2)^3 + 2 = 3 \Leftrightarrow (x-2)^3 = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$. **(5 p.)**

Subiectul III

1. ***a)*** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(3 + 5\sqrt[15]{\dfrac{x^3}{x^5}}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(3 + 5\sqrt[15]{\dfrac{1}{x^2}}\right) = \infty$. **(5 p.)**

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \dfrac{f(x)}{\sqrt[3]{x}} = \infty \cdot \infty = \infty$, deci f nu este derivabilă în $x_0 = 0$. **(5 p.)**

c) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4}} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. **(5 p.)**

2. ***a)*** $\int_0^1 (f(x) - x^5 e^x)\,dx = \int_0^1 (x+1)\,e^x\,dx = \int_0^1 (x+1)\,(e^x)'\,dx = (x+1)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx =$

$= 2e - 1 - e^x\Big|_0^1 = 2e - 1 - e + 1 = e$. **(5 p.)**

b) Cum $f(x) > 0$ pentru $x \in [0, 1)$, rezultă că $A = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^5 + x + 1)\,e^x\,dx \ge \int_0^1 (x+1)e^x\,dx =$

$= e > 2{,}5 = \dfrac{5}{2}$. **(5 p.)**

c) $\int_0^x (t^5 + t + 1)\,e^t\,dt \ge \int_0^x (t^5 + t + 1)\,dt \ge \int_0^x t^5\,dt = \dfrac{t^6}{6}\Big|_0^x = \dfrac{x^6}{6}$, $\forall x = 0$. Cum $\dfrac{1}{x^5}\int_0^x f(t)\,dt \ge \dfrac{1}{6}x$ și $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{6}x = \infty$,

rezultă că limita cerută este $+\infty$. **(5 p.)**