Testul 39

Subiectul I

1. Într-adevăr, $\log_2 3 \log_3 4 = \log_2 4 = 2 \in \mathbb{N}$. **(5 p.)**

2. Avem $x^2 + x + m + 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $\Delta = 1 - 4(m+2) \leq 0$. Rezultă $m \in \left[-\frac{7}{4}, \infty\right)$. **(5 p.)**

3. Fie $y \in \mathbb{R}$. Ecuaţia $f(x) = y$ are soluţia unică $x = y - 3 \in \mathbb{R}$, deci funcţia f este inversabilă. **(5 p.)**

4. Avem $A_n^2 = n(n-1) = 6 \cdot 5$. Numerele naturale consecutive n şi $n-1$ sunt egale cu 6, respectiv 5, deci $n = 6$. **(5 p.)**

5. Avem $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$, deoarece $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. **(5 p.)**

6. Avem $\sin(180^\circ - a) = \sin a = \frac{4}{5}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. *a)* $\det A = 4 + 2 = 6$. **(5 p.)**

b) Avem $\det B = 2$, $B^* = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. **(5 p.)**

c) $AB = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$ şi $BA = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$, deci $AB - BA = O_2$. **(5 p.)**

2. *a)* $f(\hat{0}) = \hat{1} \neq \hat{0}$, $f(\hat{1}) = \hat{1} + \hat{2} + \hat{1} = \hat{1} \neq \hat{0}$ şi $f(\hat{2}) = \hat{2} + \hat{1} + \hat{1} = \hat{1} \neq \hat{0}$, deci f nu are rădăcinile în $\mathbb{Z}_3$. **(5 p.)**

b) $r = f(-\hat{2}) = f(\hat{1}) = \hat{1}$. **(5 p.)**

c) Fie $g \in \mathbb{Z}_3[X]$ cu $g(a) = f(a)$, $\forall a \in \mathbb{Z}_3$ şi $h = g - f$. Cum $h(\hat{0}) = h(\hat{1}) = h(\hat{2}) = \hat{0}$, rezultă că:

$h = X(X - \hat{1})(X - \hat{2})c$ cu $c \in \mathbb{Z}_3[X]$.

Atunci $g - f = X(X^2 - \hat{3}X + \hat{2})c$, deci $g = (X^3 + \hat{2}X)c + f$. Cum gradul lui g este 3, rezultă că gradul lui c este 0, deci $c \in \mathbb{Z}_3$.

Pentru $c = \hat{0}$, rezultă că $g = f$.

Pentru $c = \hat{1}$, rezultă $g = X^3 + \hat{2}X + X^3 + \hat{2}X + \hat{1} = \hat{2}X^3 + X + \hat{1}$.

Pentru $c = \hat{2}$, rezultă că $g = \hat{2}X^3 + X + X^3 + \hat{2}X + \hat{1} = \hat{1}$, fals pentru că gradul lui g este 3.

Polinoamele cerute sunt f şi $2X^3 + X + \hat{1}$, care verifică evident proprietatea din enunţ. **(5 p.)**

Subiectul III

1. *a)* $f'(x) = -\frac{4x^3 + 6x}{(x^4 + 3x^2 + 2)^2}$. Atunci $\lim_{x \to \infty} x^5 f'(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{-4x^8 - 6x^6}{(x^4 + 3x^2 + 2)^2} = -4$. **(5 p.)**

b) Cum $f'(x) = -\frac{x(4x^2 + 6)}{(x^4 + 3x^2 + 2)^2}$, tabelul de variaţie a lui f este:

x	$-\infty$ 0 ∞
$f'(x)$	+ + + + + + + + 0 − − − − − − − −
$f(x)$	$\nearrow$ max $\searrow$

deci unicul punct de extrem este $x_0 = 0$. **(5 p.)**

c) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^4+3x^2+2}$. După aplicarea de 4 ori a teoremei lui l'Hospital, limita este egală cu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{24} = \infty$. **(5 p.)**

2.*a)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+4})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{5}) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **(5 p.)**

b) Cu substituția $x^2+4=t$ avem: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_4^5 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}\,\Big|_4^5 = \sqrt{5}-2$. **(5 p.)**

c) $\displaystyle V_g = \pi\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **(5 p.)**