Testul 37

Subiectul I

1. Avem $4-4\sqrt{3}+3+4+4\sqrt{3}+3=14\in\mathbb{N}$. **(5 p.)**

2. $f(-1)=3+a+1=4+a$, $f(4)=49-4a$. Obținem $a=9$. **(5 p.)**

3. Avem $2\cdot 2^x+2^{2x}=8$. Notăm $2^x=t>0$. Obținem $t^2+2t-8=0$ cu rădăcinile $t_1=2$, $t_2=-4<0$.

Avem $2^x=2\Leftrightarrow x=1$. **(5 p.)**

4. Sunt $4!=24$ permutări. **(5 p.)**

5. $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+\vec{j}$ și $\overrightarrow{AC}=3(\vec{i}+\vec{j})=3\overrightarrow{AB}$, deci *A*, *B*, *C* sunt coliniare. **(5 p.)**

6. Avem $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$, deci $BC=3\sqrt{2}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. *a)* $A(3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$ și $\det A(3)=1$. **(5 p.)**

b) $A(n)\cdot A(m)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&n&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&m&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&n+m&1\end{pmatrix}=A(n+m)$, oricare ar fi $n,m\in\mathbb{Z}$. **(5 p.)**

c) Observăm că $A(0)=I_3$ și $A(3)\cdot A(-3)=A(3-3)=I_3$, deci inverse matricei $A(3)$ este

$A(-3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}$. **(5 p.)**

2. *a)* Din primele 2 relații ale lui Viète rezultă că $x_1+x_2+x_3+x_4=-a$ și $x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_3x_4=0$. Rezultă că $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_3x_4)=a^2$. Deci $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow a=\pm1$. **(5 p.)**

b) $\dfrac{x_1^2-1}{x_1}+\dfrac{x_2^2-1}{x_2}+\dfrac{x_3^2-1}{x_3}+\dfrac{x_4^2-1}{x_4}=x_1+x_2+x_3+x_4-\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}\right)=$

$=x_1+x_2+x_3+x_4-\dfrac{x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4}=-a+a=0$. **(5 p.)**

c) $f=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_3)$, deci $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}-x_1\right)\left(\dfrac{1}{2}-x_2\right)\left(\dfrac{1}{2}-x_3\right)\left(\dfrac{1}{2}-x_3\right)=$

$\dfrac{1}{16}(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3)(1-2x_4)$. Deci numărul cerut este egal cu $16f\left(\dfrac{1}{2}\right)=16\left(\dfrac{1}{16}+\dfrac{a}{8}+\dfrac{a}{2}+1\right)=$

$=1+2a+8a+16=10a+17$. **(5 p.)**

Subiectul III

1.*a)* $f'(x)=3x^2+1+2e^x>0$, $\forall x\in(-\infty,0)$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,0)$. Cum f este continuă la stânga în 0, rezultă că f este crescătoare pe $(-\infty,0]$. **(5 p.)**

b) $f(x)\le f(0)=2$, $\forall x\in(-\infty,0)$. Cum $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+1}{x+1}=\ 2+\dfrac{1}{x+1}>2$, $\forall x\in(0,\infty)$ rezultă că $f(x)<2<f(y)$, $\forall x\in(-\infty,0)$ și $y\in(0,\infty)$. **(5 p.)**

c) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(2+\dfrac{1}{x+1}\right)'\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x^2}{(x+1)^2}\right)=-1$. **(5 p.)**

2.*a)* $f(1)=\int\limits_0^1 t\,e^t\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 t(e^t)'\,\mathrm{d}t=t\,e^t\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^t\mathrm{d}t=e-e^t\Big|_0^1=e-e+1=1$. **(5 p.)**

b) $f(x)=\int\limits_0^1 t^xe^t\mathrm{d}t\le e\int\limits_0^1 t^x\mathrm{d}t=e\dfrac{t^{x+1}}{x+1}\Bigg|_0^1=\dfrac{e}{x+1}$. **(5 p.)**

c) $f(x+1)+(x+1)\,f(x)=\int\limits_0^1 t^{x+1}e^t\mathrm{d}t+(x+1)\int\limits_0^1 t^xe^t\mathrm{d}t=t^{x+1}e^t\Big|_0^1-\int\limits_0^1(x+1)\,t^xe^t\mathrm{d}t+(x+1)\int\limits_0^1 t^xe^t\mathrm{d}t=$

$=t^{x+1}e^t\Big|_0^1=e$. **(5 p.)**