Testul 36

Subiectul I

1. $\log_n 27 = k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 27 = n^k$, deci $n > 1$ divide 27. Obținem $n \in \{3,27\}$, dar $\log_9 27 = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$. **(5 p.)**

2. Maximul funcției este $y_v = -\frac{\Delta}{4\cdot a} = \frac{4+4a}{4} = 1+a$. Din $a+1=2$ obținem $a=1$. **(5 p.)**

3. Avem $3^{x+1} = 3^{2x}$, deci $x=1$. **(5 p.)**

4. $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$. **(5 p.)**

5. $3\vec{v_1} + \vec{v_2} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\left|4\vec{i} + 4\vec{j}\right| = 4\sqrt{2}$. **(5 p.)**

6. $\cos(180° - x) = -\cos x = -\frac{3}{4}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1.*a)* $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, oricare ar fi $a,b,c \in \mathbb{R}$. **(5 p.)**

b) Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Avem $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(A-I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $(A-I_3)^3 = 0_3$. **(5 p.)**

c) Fie $A, B \in M$. Atunci există $a,b,c,x,y,z \in \mathbb{R}$ cu $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și

$AB = \begin{pmatrix} 1 & a+x & y+az+b \\ 0 & 1 & z+c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$. **(5 p.)**

2.*a)* $f(\hat{2}) = \hat{2}^3 + a\hat{2}^2 + \hat{2} + \hat{2} = \hat{2} + a + \hat{1} = a$. Rezultă $f(\hat{2}) = 0 \Leftrightarrow a = \hat{0}$. **(5 p.)**

b) $f(\hat{1}) = \hat{1} + a + \hat{1} + \hat{2} = a + \hat{1}$. Avem $f(\hat{1}) = \hat{0} \Leftrightarrow a + \hat{1} = \hat{0} \Leftrightarrow a = \hat{2}$.

Pentru $a = \hat{0}$ rezultă că $f(\hat{2}) = \hat{0}$, deci f este reductibil.

Pentru $a = \hat{2}$ rezultă că $f(\hat{1}) = \hat{0}$, deci f este reductibil.

Pentru $a = \hat{1}$ rezultă $f = X^3 + X^2 + X + \hat{2}$.

Cum $f(\hat{0}) = \hat{2} \neq \hat{0}$, $f(\hat{1}) = \hat{2} \neq \hat{0}$ și $f(\hat{2}) = \hat{1} \neq \hat{0}$ rezultă că f este ireductibil deoarece are gradul 3 și nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$. **(5 p.)**

c) Pentru $a = \hat{1}$, f nu are nicio rădăcină în $\mathbb{Z}_3$.

Pentru $a = \hat{0}$, $f = X^3 + X + \hat{2}$. Cum $f(\hat{1}) = \hat{1}$ și $f(\hat{0}) = \hat{2}$, rezultă că f are doar rădăcina $\hat{2}$.

Pentru $a = \hat{2}$, $f = X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{2}$. Cum $f(\hat{0}) = \hat{2}$ și $f(\hat{2}) = \hat{2}$, rezultă că f are doar rădăcina $\hat{1}$.

Deci f are cel mult o rădăcină în $\mathbb{Z}_3$. **(5 p.)**

Subiectul III

1.*a)* $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow 0}(x^3 - x + \ln x + 1) = -\infty$, deci dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală. Cum f este continuă pe $(0, \infty)$, rezultă că graficul lui f nu are altă asimptotă. **(5 p.)**

b) Fie $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x^3=\ln x-x+1$. Avem $g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ şi fie tabloul de variaţie:

x	0 $\quad$ 1 $\quad$ ∞
$g'(x)$	+ + + + + + + 0 − − − − − − − −
$g(x)$	↗ max ↘

Rezultă că $g(x)\le g(1)=0$, deci $g(x)\le 0$, $\forall x\in(0,\infty)$. Atunci $f(x)\le x^3$, $\forall x\in(0,\infty)$. **(5 p.)**

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\,f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(3x^2-1+\frac{1}{x}\right)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x+1}{x^3-x+\ln x+1}=3$. **(5 p.)**

2*a)* $f(x)=\log_2 x=\frac{\ln x}{\ln 2}$, $x\in(0,\infty)$.

Atunci $\int f(x)\,dx=\frac{1}{\ln 2}\int \ln x\,dx=\frac{1}{\ln 2}\int x'\ln x\,dx=\frac{1}{\ln 2}\left(x\ln x-\int dx\right)=\frac{1}{\ln 2}(x\ln x-x)+C=$

$=x\log_2 x-\frac{1}{\ln 2}x+C$. **(5 p.)**

b) $\int_1^2 x\,f(x)\,dx=\frac{1}{\ln x}\int_1^2 x\ln x\,dx=\frac{1}{\ln 2}\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx=\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)=$

$=\frac{1}{\ln 2}\left(2\ln 2-\frac{x^2}{4}\Big|_1^2\right)=2-\frac{3}{4\ln 2}$. **(5 p.)**

c) $\int_1^2 f^n(x)\,dx=\int_1^2\frac{\ln^n x}{\ln^n 2}\,dx=\frac{1}{\ln^n 2}\int_1^2 x'\ln^n x\,dx=\frac{1}{\ln^n 2}\left(x\ln^n x\Big|_1^2-n\int_1^2 x\ln^{n-1}x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)=$

$=\frac{1}{\ln^n 2}\left(2\ln^n 2-n\int_1^2\ln^{n-1}x\,dx\right)=2-\frac{n}{\ln 2}\int_1^2\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)^{n-1}dx=2-\frac{n}{\ln 2}\int_1^2 f^{n-1}(x)\,dx.$

Deci $\int_1^2 f^n(x)\,dx+\frac{n}{\ln 2}\int_1^2 f^{n-1}(x)\,dx=2$. **(5 p.)**