Testul 35

Subiectul I

1. Avem $a=\sqrt{500}$ şi $22^2=484<500<23^2=529$. Atunci $[a]=22$. **(5 p.)**

2. Imaginea este $[y_v,\infty)=\left[\frac{7}{4},\infty\right)$, unde $y_v=-\frac{\Delta}{4}=\frac{7}{4}$. **(5 p.)**

3. Cum $\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$, obţinem $x+1=2(2-x)$, deci $x=1$. **(5 p.)**

4. Sunt $A_4^3=24$ de submulţimi. **(5 p.)**

5. Ecuaţia este $y-4=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x+2$. **(5 p.)**

6. Cel mai mare unghi se opune celei mai mari laturi, deci este B.

Avem $\cos B=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot 3\cdot 5}=\frac{-15}{30}=-\frac{1}{2}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1.a) Avem $\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=2-6-4-1=-9$. **(5 p.)**

b) Observăm că $1-3+2=0$ şi $1+1+1=0$. Din ultima ecuaţie rezultă $m=3$. **(5 p.)**

c) Avem $\Delta=-9$, $\Delta_x=\begin{vmatrix}0 & -3 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 12 & 1 & 0\end{vmatrix}=6-36-24=-54$, $\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 12 & 0\end{vmatrix}=24-12-12=0$, deci

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=6$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=0$ şi $z=3-x-y=-3$. **(5 p.)**

2.a) Pentru $a=b=0$ rezultă $f=X^4+X+1$. Atunci $r=f(-2)=16-2+1=15$. **(5 p.)**

b) Presupunem că cele 2 câturi sunt egale. Atunci $f=(X-p)c+f(p)$ şi $f=(X-q)c+f(q)$. Prin scădere rezultă că $0=(q-p)c+f(p)-f(q)$.

Cum $p-q\neq 0$, rezultă că $-\infty=\text{grad}((q-p)c+f(p)-f(q))=\text{grad}(c)=3$, contradicţie. **(5 p.)**

c) Notăm cu $S_k=x_1^k+x_2^k+x_3^k+x_4^k$. Din primele două relaţii ale lui Viète rezultă că $S_1=x_1+x_2+x_3+x_4=0$ şi $S_2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+...+x_3x_4)=-2$. Cum $x_i^4=-x_i^2-x_i-1$, $i=\{1,2,3,4\}$, prin însumare obţinem $S_4=-S_2-S_1-4=2-4=-2$. **(5 p.)**

Subiectul III

1.a) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3+4x}=1$ şi $n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+4}-x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4x}{x^2+4}=0$, deci dreapta $y=1$ este asimptota oblică spre $-\infty$. **(5 p.)**

b) Avem $(x^2+4)f(x)=x^3$, deci $2xf(x)+(x^2+4)f'(x)=3x^2$. **(5 p.)**

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x^2+4)\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+4}\cdot\frac{x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$. **(5 p.)**

2.a) $\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{(1+x^3)'}{1+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int_1^2\frac{1}{t}\,dt=\frac{1}{3}\ln t\Big|_1^2=\frac{1}{3}\ln 2$. **(5 p.)**

b) $A=\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\int_0^1 \frac{\frac{3}{4}}{(1+x)(x^2-x+1)}\,\mathrm{d}x\le$

$\le\frac{4}{3}\int_0^1 \frac{x^2-x+1}{(1+x)(x^2-x+1)}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\ln(1+x)\Big|_0^1=\frac{4}{3}\ln 2=\frac{1}{3}\ln 16$. **(5 p.)**

c) $\int_0^1 (x-1)\,f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1 ((x^2-x+1)\,f(x)-x^2 f(x))\,\mathrm{d}x=-\int_0^1 \frac{x^2-x+1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x=$

$=-\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\ln 2=-\ln(1+x)\,\Big|_0^1+\frac{1}{3}\ln 2=\frac{1}{3}\ln 2-\ln 2=-\frac{2}{3}\ln 2$. **(5 p.)**