Testul 34

Subiectul I

1. Termenii sumei sunt în progresie cu rația 2. Notând cu n numărul de termini, avem $x = 2n-1$ și $1+3+\ldots+x = \frac{1+x}{2}\cdot n = n^2$. Atunci $n^2 = 100 \Rightarrow n = 10 \Rightarrow x = 19$. **(5 p.)**

2. Ecuația $f(x) = 0$ revine la $|x| = \frac{1}{2}$, deci $x = \pm\frac{1}{2}$. Avem două puncte: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ și $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. **(5 p.)**

3. Fie $y \in \mathbb{R}$ arbitrar. Ecuația $f(x) = y$ are unica soluție $x = 2y-1$, deci $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = 2y-1$. **(5 p.)**

4. Avem $\frac{10!}{5!5!}\cdot\frac{4!5!}{9!} = \frac{10}{5} = 2$. **(5 p.)**

5. Cum $|\vec{v}| = 5$, avem $|a\vec{v}| = 5|a|$. Din $5|a| = 10$ rezultă $a = 2$ sau $a = -2$. **(5 p.)**

6. Avem $\sin 30^0 + \sin 135^0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. ***a)*** $\det A(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 1 + x^3 + x^3 - x^2 - x^2 - x^2 = 2x^3 - 3x^2 + 1$. **(5 p.)**

b) Cum $2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)^2(2x+1)$, determinantul lui $A(x)$ se anulează doar când $x = 1$, deoarece $x = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Cerința este demonstrată. **(5 p.)**

c) $A(0) = I_3$, deci inversa este I_3. **(5 p.)**

2*a)* $f = X^3 + X^2 + X + X^2 + X + 1 + (a-2)X + b - 1 = X(X^2 + X + 1) + X^2 + X + 1 + (a-2)X + b - 1 =$ $= (X^2 + X + 1)(X + 1) + (a-2)X + b - 1$, f se divide cu $X^2 + X + 1 \Leftrightarrow (a-2)X + b - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ și $b = 1$. **(5 p.)**

b) Pentru $a = 2$ și $b = 1$ rezultă că $f = (X^2 + X + 1)(X + 1)$. Polinomul $X + 1$ este ireductibil deoarece are gradul 1, iar polinomul $X^2 + X + 1$ este ireductibil deoarece are gradul 2 și $\Delta < 0$. **(5 p.)**

c) $x_1(1-x_1) + x_2(1-x_2) + x_3(1-x_3) = 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 - (x_1 + x_2 + x_3)^2 +$ $+ 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 2 \Leftrightarrow -2 - 4 + 2a = 2 \Leftrightarrow 2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$. **(5 p.)**

Subiectul III

1*a)* $\lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} + x^3}{x} = \lim\limits_{x \nearrow 0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + x^2\right) = +\infty$, dacă $f_S'(0) = \infty$.

$\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{(x^2 + x)e^x}{x} = \lim\limits_{x \searrow 0}(x+1)\,e^x = 1$, deci $f_d'(0) = 1$. **(5 p.)**

b) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 3x^2 > 0$, $\forall x \in (-\infty, 0)$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, 0)$. **(5 p.)**

c) $f'(x) = (2x+1)e^x + (x^2 + x)e^x = (x^2 + 3x + 1)e^x$ și $f''(x) = (2x+3)e^x + (x^2 + 3x + 1)e^x = (x^2 + 5x + 4)e^x$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{f''(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x^2 + x)e^x}{(x^2 + 5x + 4)e^x} = 1$. **(5 p.)**

2*a*) $V_f = \pi \int_1^2 \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = \pi \int_1^2 \left(x^6 + 2x + \frac{1}{x^4}\right) dx = \pi \left(\frac{x^7}{7} + x^2 - \frac{1}{3x^3}\right)\Big|_1^2 = \pi \left(\frac{128}{7} + 4 - \frac{1}{24} - \frac{1}{7} - 1 + \frac{1}{3}\right) =$

$= \pi \left(\frac{127}{7} + \frac{7}{24} + 3\right) = \frac{3601\pi}{168}$. **(5 p.)**

b) $\int_1^2 x\, f(x) \ln x\, dx = \int_1^2 \left(x^4 + \frac{1}{x}\right) \ln x\, dx = \int_1^2 x^4 \ln x\, dx + \int_1^2 \frac{1}{x} \ln x\, dx = \int_1^2 \left(\frac{x^5}{5}\right)' \ln x\, dx + \frac{1}{2}\ln^2 x \Big|_1^2 =$

$= \frac{x^5}{5} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2}\ln^2 2 = \frac{32}{5}\ln 2 - \frac{x^5}{25}\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\ln^2 2 = \frac{32\ln 2}{5} - \frac{31}{25} + \frac{\ln^2 2}{2}$. **(5 p.)**

c) Fie F o primitivă a lui f. Atunci $F''(x) = f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^3} = \frac{3x^5 - 2}{x^3} \geq \frac{1}{x^3} > 0$, $\forall x \in [1, 2]$, deci F este funcție convexă pe $[1, 2]$. **(5 p.)**